

# 哈尔滨市第一中学校 2020—2021 学年度上学期期中考试

## 高三数学（理科）试卷

### 参考答案

1. C 【详解】 $A=\{x \in \mathbb{N}^* | x^2-3x-4 \leq 0\}=\{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B=\{x | x^2-3x+2=0\}=\{1, 2\}$ , 又  $B \subseteq C \subseteq A$ , 所以满足条件的集合  $C$  为  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 2, 3, 4\}$ , 共 4 个, 故选: C.

2. B 【详解】 $\because z=i^6+(1+i)^2=-1+2i$ ,  $\therefore$  复数  $z$  的虚部为 2. 故选: B.

3. A 【详解】 $\because \sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{5}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ,  $\therefore \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} > 0$ ,  $\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{23}{25} > 0$ ,  $\therefore$  角  $\alpha$  是第一象限角, 故选: A

4. C 【详解】 $\because (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ ,  $\therefore \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 0$ ,  $\therefore |\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}|$ , 点 M 在底边 BC 的中垂线上, 又  $\because \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ,  $\therefore \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AM}$ , 所以点 M 在底边 BC 的中线上, 因而底边 BC 的中线与垂直平分线重合, 所以  $\triangle ABC$  的形状为等腰三角形.

5. A 【详解】由于  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ , 且  $a_n = \begin{cases} 2a_{n-1} - 1, n \text{ 为偶数} \\ 2a_{n-1} + 2, n \text{ 为奇数} \end{cases}$ , 所以  $a_2 = 2a_1 - 1 = 1$ ,

$a_3 = 2a_2 + 2 = 4$ ,  $a_4 = 2a_3 - 1 = 8 - 1 = 7$ . 故选: A

6. A 【详解】: 因为切线过  $(2, 0)$  和  $(0, -1)$ , 所以  $f'(1) = \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2}$ ,

所以切线方程为  $y = \frac{1}{2}x - 1$ , 取  $x = 1$ , 则  $y = -\frac{1}{2}$ , 所以  $f(1) = -\frac{1}{2}$ ,

所以  $f(1) + f'(1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ . 故选: A.

7. C 【详解】①中,  $m // n$ ,  $n \perp \alpha$  由线面垂直的第二判断定理, 可得  $m \perp \alpha$ , 故①正确.

②中,  $m \perp n$ ,  $n // \alpha$ , 则  $m$  与  $\alpha$  可能平行也可能相交, 故② 错误.

③中,  $m // \beta, \alpha \perp \beta$ , 则  $m$  与  $\alpha$  可能平行也可能相交也可能线在面内, 故③错误.

④中,  $m \perp \beta, \alpha // \beta$ , 由面面平行的性质, 可得得  $m \perp \alpha$ , 故④正确,

故能使  $m \perp \alpha$  成立的充分条件有① ④, 故选 C.

8. C 【详解】数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2$ ,  $na_{n+1}^2 - 2a_{n+1}a_n - (n+2)a_n^2 = 0$ ,

整理得  $[na_{n+1} - (n+2)a_n](a_n + a_{n+1}) = 0$ ,

由于数列为正项数列, 所以  $na_{n+1} = (n+2)a_n$ , 整理得  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n}$ ,

故  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{n-1}$ ,  $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n}{n-2} \dots, \frac{a_4}{a_2} = \frac{4}{2}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1}$ ,

各式相乘得到  $\frac{a_n}{a_1} = \frac{n \times (n+1)}{1 \times 2}$ , 又  $a_1 = 2$ , 所以  $a_n = n(n+1)$ . 则  $\frac{(n+1)^2}{a_n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ ,

①当  $n=1$  时,  $\frac{1}{n} = 1$ ,  $\frac{2^2}{a_1} = 1+1=2$ ;

②当  $n>1$  时,  $\frac{1}{n} \in (0,1)$ , 则  $\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{a_n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{n} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \frac{1}{n} \right\rfloor = 1$ .

所以  $\left\lfloor \frac{2^2}{a_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3^2}{a_2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2020^2}{a_{2019}} \right\rfloor = 2 + 2018 = 2020$ . 故选: C.

9. C 【详解】由题意, 函数的  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  周期为

$$\frac{T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \therefore T = \pi, \omega = 2,$$

$$\text{又 } 2 \times \frac{7\pi}{12} + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2} \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}, f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3}),$$

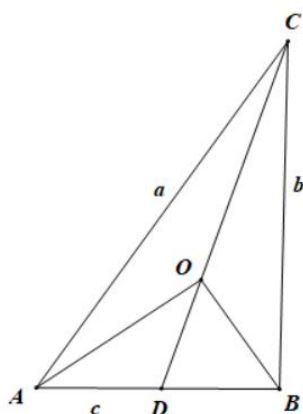
为了得到  $y = \sin 2x$  的图象, 只需将  $y = f(x)$  的图象向右平

移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 选 C

10. D【详解】设 CO 的延长线交 AB 于点 D,  $\because O$  为  $\square ABC$

的重心,  $\therefore D$  为 AB 的中点, 又  $\because \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ ,  $\therefore OD = \frac{1}{2} AB$

又  $\because CD = 3OD$ ,  $\therefore CD = \frac{3}{2} AB$



由余弦定理得  $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC$  ①

$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cos \angle BDC$  ②

① + ② 可得  $AC^2 + BC^2 = 2(AD^2 + CD^2) = 5AB^2$ ,

即  $a^2 + b^2 = 5c^2$

$$\begin{aligned} \frac{\tan C}{\tan A} + \frac{\tan C}{\tan B} &= \tan C \cdot \left( \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} \right) = \tan C \cdot \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} \\ &= \frac{\sin C}{\cos C} \cdot \frac{\sin C}{\sin A \sin B} = \frac{\sin^2 C}{\sin A \sin B \cos C} = \frac{c^2}{ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}} = \frac{2c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{2c^2}{4c^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

故选: D.

11. C【详解】取 AD, BD 中点 E, F, 设  $\triangle BCD$  的外心为 M, 连 MB, MF, EF,

则  $MF \perp BD$ ,  $\angle BMF = \frac{1}{2} \angle DMB = \angle BCD = 30^\circ$ ,  $\therefore BM = 2BF = BD$

分别过 E, M 作 MF, EF 的平行线, 交于 O 点,

即  $OE \parallel MF$ ,  $OM \parallel EF$ ,

$\because BD \perp AB$ ,  $\therefore E$  为  $\triangle ABD$  的外心,

平面 ABD  $\perp$  平面 BCD,  $AB \perp$  平面 BCD,

$EF \parallel AB$ ,  $\therefore EF \perp$  平面 BCD,  $\therefore OM \perp$  平面 BCD,

同理  $OE \perp$  平面 ABD, E, M 分别为  $\triangle ABD$ ,  $\triangle BCD$  外心,

$\therefore O$  为三棱锥的外接球的球心, OB 为其半径,

$$OB^2 = BM^2 + OM^2 = BD^2 + EF^2 = BD^2 + \frac{1}{4}AB^2 = \frac{3}{2},$$

$$S_{\text{球}} = 4\pi \times OB^2 = 6\pi. \text{ 故选: C}$$

12. B

【详解】令  $f(x) = t$ ，则可得  $f(t) = 1$ ，

当  $t \leq 0$  时，即可得  $\log_2(1-t) = 1$ ，解得  $t = -1$ ；

当  $t > 0$  时，即可得  $-t^2 + 4t = 1$ ，解得  $t = 2 \pm \sqrt{3}$ 。

则  $f(x) = -1$ ，或  $f(x) = 2 + \sqrt{3}$ ，或  $f(x) = 2 - \sqrt{3}$

当  $x \leq 0$  时，

令  $\log_2(1-x) = -1$ ，解得  $x = \frac{1}{2}$ ，不满足题意；

令  $\log_2(1-x) = 2 + \sqrt{3}$ ，解得  $x = 1 - 2^{2+\sqrt{3}} \leq 0$ ，满足题意；

令  $\log_2(1-x) = 2 - \sqrt{3}$ ，解得  $x = 1 - 2^{2-\sqrt{3}} \leq 0$ ，满足题意。

当  $x > 0$  时，

令  $-x^2 + 4x = -1$ ，解得  $x = 2 + \sqrt{5}$  或  $x = 2 - \sqrt{5}$  (舍)；

令  $-x^2 + 4x = 2 + \sqrt{3}$ ，整理得  $x^2 - 4x + 2 + \sqrt{3} = 0$ ，

解得  $x = 2 + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$  或  $x = 2 - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$  满足题意；

令  $-x^2 + 4x = 2 - \sqrt{3}$ ，整理得  $x = 2 + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$  或  $x = 2 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$  满足题意。

综上所述，函数零点有  $1 - 2^{2+\sqrt{3}}$ ,  $1 - 2^{2-\sqrt{3}}$ ,  $2 + \sqrt{5}$ ,  $2 \pm \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ ,  $2 \pm \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

共计 7 个。

故选：B。

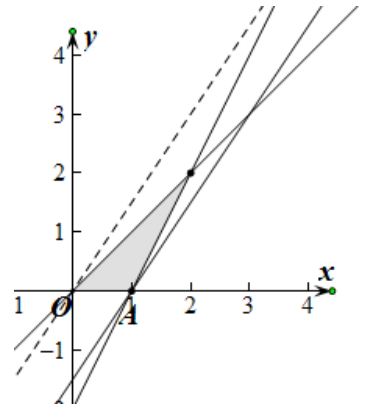
13. -3 【详解】 作出不等式组对应的平面区域如图：

由  $z = 2y - 3x$  得  $y = \frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$ ，平移直线  $y = \frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$  由图象可

知当直线  $y = \frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$  经过点 A 时，直线  $y = \frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$  的截距最

小，此时  $z$  最小，由  $\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ，即  $A(1,0)$ ，

则  $z_{\min} = 2 \times 0 - 3 \times 1 = -3$ ，故答案为 -3.



14.  $a_n = \begin{cases} 12, n=1 \\ 3^{n+1}, n \geq 2 \end{cases}$  【详解】 当  $n=1$  时， $\frac{1}{3}a_1 = 4$ ， $\therefore a_1 = 12$ ；

当  $n \geq 2$  时，由于

$$\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3^2}a_2 + \cdots + \frac{1}{3^n}a_n = 3n+1, n \in N^*, \quad \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3^2}a_2 + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}a_{n-1} = 3(n-1)+1,$$

两式相减得  $\frac{1}{3^n}a_n = 3, \therefore a_n = 3^{n+1} (n \geq 2)$ ， $a_1 = 12$  不满足， $\therefore a_n = \begin{cases} 12, n=1 \\ 3^{n+1}, n \geq 2 \end{cases}$ .

15.  $(-3,1)$  【详解】  $f'(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + a - 1$ ，

若函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax - 5$  在区间  $[-1,2]$  上单调，则  $f'(x) \geq 0$  或  $f'(x) \leq 0$  在

$[-1,2]$  上恒成立，即  $a-1 \geq 0$  或  $f'(-1) = 3+a \leq 0$ ，

$\therefore a \geq 1$  或  $a \leq -3$ ，于是满足条件的实数  $a$  的范围为  $(-3,1)$ ，故答案为：  $(-3,1)$ .

16.  $\frac{37}{8}$  【详解】 由题意可得  $a^2 - 4 = 2a - 8$  或  $a^2 - 4 + 2a - 8 = 2 \times (-\frac{a+8}{2})$ ，

解得  $a = 1$  或  $a = -4$ ，

当  $a = 1$  时， $f(x) = x^2 + 9x - 10$ ，数列  $\{a_n\}$  不是等差数列；

当  $a = -4$  时， $f(x) = x^2 + 4x$ ， $S_n = f(n) = n^2 + 4n$ ，

$$\therefore a_1 = 5, a_2 = 7, a_n = 5 + (7 - 5)(n - 1) = 2n + 3,$$

$$\therefore \frac{S_n - 4a}{a_n - 1} = \frac{n^2 + 4n + 16}{2n + 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n + 1)^2 + 2(n + 1) + 13}{n + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [(n + 1) + \frac{13}{n + 1} + 2] \geq \frac{1}{2} (2\sqrt{(n + 1) \cdot \frac{13}{n + 1}} + 2) = \sqrt{13} + 1,$$

当且仅当  $n + 1 = \frac{13}{n + 1}$  即  $n = \sqrt{13} - 1$  时取等号,

$\therefore n$  为正数, 故当  $n = 3$  时原式取最小值  $\frac{37}{8}$ .

$$17. (1) \text{ 直线 } l: \sqrt{3}x - y - 1 = 0, \text{ 曲线 } C: x^2 + y^2 - 2ax = 0 \quad (2) \quad a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

【详解】(1) 因为直线  $l$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$$

消去  $t$  化简得直线  $l$  的普通方程:  $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$  3 分

由  $\rho = 2a \cos \theta$  得  $\rho^2 = 2a \rho \cos \theta$ , 因为  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $\rho \cos \theta = x$ , 所以  $x^2 + y^2 = 2ax$ ,

所以曲线  $C$  的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  5 分

(2) 将 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$$
 代入  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  得  $\frac{1}{4}t^2 + \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 - at = 0$

即  $t^2 - (\sqrt{3} + a)t + 1 = 0$ ,  $\Delta = (\sqrt{3} + a)^2 - 4 > 0$

则  $t_1 + t_2 = \sqrt{3} + a$ ,  $t_1 t_2 = 1$ ,  $\therefore |MA| \cdot |MB| = t_1 t_2 = 1$ ,  $\therefore |AB|^2 = 1$

$\therefore |AB|^2 = (t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = (\sqrt{3} + a)^2 - 4 = 1$  8 分

$\therefore a > 0$ ,  $\therefore a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ , 满足  $\Delta = (\sqrt{3} + a)^2 - 4 > 0$

$\therefore a = \sqrt{5} - \sqrt{3}$  10 分

18. (1)  $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ , 单调递增区间为  $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$ . (2)  $(0, 3]$ .

【详解】(1)  $f(x) = 4\cos x \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 4\cos x \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) + 2$

$$= 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 2\cos^2 x + 2 = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 1$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + 1 = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1, \quad 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{解得 } -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbb{Z}). \quad 6 \text{ 分}$$

(2)  $\because$  在  $\triangle ABC$  中,  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}ac$

$$\therefore ac \cos B = \frac{1}{2}ac \quad \therefore \cos B = \frac{1}{2}, \quad \because 0 < B < \pi \quad \therefore B = \frac{\pi}{3} \quad 8 \text{ 分}$$

$$\therefore A + C = \frac{2\pi}{3}, \quad \therefore 0 < A < \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{函数 } f(A) = 2\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) + 1,$$

$$\therefore 0 < 2A < \frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{6} < 2A - \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}, \quad \therefore -\frac{1}{2} < \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1, \quad 10 \text{ 分}$$

$$\therefore 0 < f(A) \leq 3, \quad \therefore f(A) \text{ 的值域为 } (0, 3] \quad 12 \text{ 分}$$

19. (1) 证明见解析; (2)  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .

【详解】(1) 证明: 取  $B_1D_1$  的中点  $E$ , 连接  $C_1E$ ,  $OA$ ,  $AE$ , 由四边形  $ABCD$  是菱形,

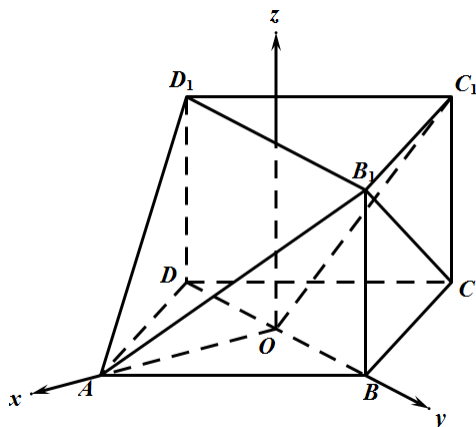
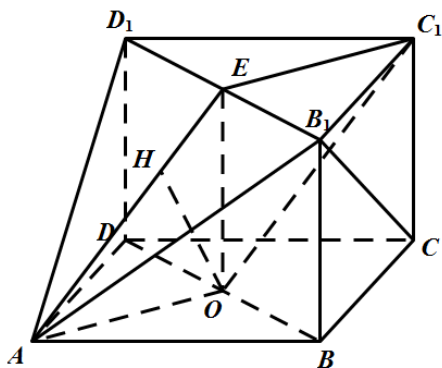
易知  $C_1E = OA$  且  $C_1E \parallel OA$ ，所以

$C_1EAO$  为平行四边形，所以

$C_1O \parallel EA$ ，3分

又  $C_1O \not\subset$  面  $AB_1D_1$ ， $AE \subset$  面  $AB_1D_1$ ，

所以  $C_1O \parallel$  平面  $AB_1D_1$ 。6分



(2) 以  $O$  为坐标原点， $OA$ ， $OB$ ， $OE$  所在的直线分别为  $x$ ， $y$ ， $z$  轴，如图所示，建立空间直角坐标系  $O-xyz$ ，得  $A(\sqrt{3}, 0, 0)$ ， $B_1(0, 1, 1)$ ， $D_1(0, -1, 1)$ ， $C(-\sqrt{3}, 0, 0)$ ，

所以  $\overrightarrow{AB_1} = (-\sqrt{3}, 1, 1)$ ， $\overrightarrow{D_1B_1} = (0, 2, 0)$ ， $\overrightarrow{B_1C} = (-\sqrt{3}, -1, -1)$ ，8分

设平面  $AB_1D$  的一个法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则 
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{D_1B_1} = 0 \end{cases}$$

得 
$$\begin{cases} -\sqrt{3}x + y + z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$
，令  $x=1$ ，有  $y=0$ ， $z=\sqrt{3}$ ，所以  $\vec{n} = (1, 0, \sqrt{3})$ 。10分

记  $\alpha$  为直线  $B_1C$  与平面  $AB_1D_1$  所成角的平面角，则  $\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{B_1C}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{B_1C}|} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ 。12分

20. (1)  $a_n = 3n - 2$ ；(2)  $T_{2n} = 18n^2 - 3n$ 。



【详解】(1)  $6S_n = a_n^2 + 3a_n + 2, n \in N^*$ .

$n=1$  时,  $6a_1 = a_1^2 + 3a_1 + 2$ , 且  $a_1 < 2$ , 解得  $a_1 = 1$ . 1 分

$n \geq 2$  时,  $6a_n = 6S_n - 6S_{n-1} = a_n^2 + 3a_n + 2 - (a_{n-1}^2 + 3a_{n-1} + 2)$ , 3 分

化为:  $(a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 3) = 0$ ,

$\because a_n > 0, \therefore a_n - a_{n-1} = 3$ , 5 分

$\therefore$  数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 首项为 1, 公差为 3.

$\therefore a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$ . 6 分

(2)  $b_n = (-1)^n a_n^2 = (-1)^n (3n - 2)^2$ . 7 分

$\therefore b_{2n-1} + b_{2n} = -(6n-5)^2 + (6n-2)^2 = 3(12n-7) = 36n - 21$ . 10 分

$\therefore$  数列  $\{b_n\}$  的前  $2n$  项的和

$T_{2n} = 36(1+2+\dots+n) - 21n = 36 \times \frac{n(n+1)}{2} - 21n = 18n^2 - 3n$ . 12 分

21. (1)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (2) 存在点 M 为线段 PC 的三等分点满足题意, 详见解析

【详解】设 O 是 AD 中点,  $\triangle PAD$  为正三角形,

则  $PO \perp AD$ , 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD$

$PO \perp$  面  $ABCD$ , 2 分

又  $\because AD = AE = 2$ ,

$\angle DAB = 60^\circ$ , 所以  $\square ADE$  为正三角形,  $OE \perp AD$ ,

建立如图所示空间直角坐标系  $O-xyz$ , 3 分

则  $P(0,0,\sqrt{3}), E(0,\sqrt{3},0), C(-2,\sqrt{3},0), D(-1,0,0)$ ,

于是  $\overrightarrow{PC}=(-2,\sqrt{3},-\sqrt{3}), \overrightarrow{PE}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3}), \overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$ ,

(1) 设平面  $PEC$  的法向量为  $\vec{n}_1=(x,y,z)$ ,

由  $\overrightarrow{PC} \cdot \vec{n}_1=0, \overrightarrow{PE} \cdot \vec{n}_2=0$  得一个法向量为  $\vec{n}_1=(0,1,1)$ , 4 分

平面  $EDC$  的一个法向量为  $\vec{n}_2=(0,0,1)$ , 5 分

设二面角  $P-EC-D$  的平面角为  $\theta$ , 则

$$|\cos \theta| = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

由图知为  $\theta$  锐角, 所以, 二面角  $P-EC-D$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 6 分

(2) 设  $\overrightarrow{PM}=\lambda \overrightarrow{PC}(0 \leq \lambda \leq 1)$ , 则  $\overrightarrow{PM}=(-2\lambda, \sqrt{3}\lambda, -\sqrt{3}\lambda)$ ,

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{PM}=(1-2\lambda, \sqrt{3}\lambda, \sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda), \overrightarrow{PE}=(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ , 8 分

$$\text{所以 } |\cos \langle \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{PE} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{PE}}{|\overrightarrow{DM}| |\overrightarrow{PE}|} \right| = \frac{|6\lambda-3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10\lambda^2-10\lambda+4}} = \frac{\sqrt{6}}{8} \quad 10 \text{ 分}$$

解得  $\lambda = \frac{1}{3}$  或  $\frac{2}{3}$ , 所以存在点  $M$  为线段  $PC$  的三等分点. 12 分

22. (1)  $a=1$ ; (2) 见解析.

【详解】

(1) 解: 因为  $f(x) = ax^2 - ax - x \ln x = x(ax - a - \ln x) (x > 0)$ ,

则  $f(x) \geq 0$  等价于  $h(x) = ax - a - \ln x \geq 0$ , 1 分

求导可知  $h'(x) = a - \frac{1}{x}$ . 2 分

则当  $a \leq 0$  时  $h'(x) < 0$ , 即  $y=h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 3 分

所以当  $x_0 > 1$  时,  $h(x_0) < h(1) = 0$ , 矛盾, 故  $a > 0$ . 4 分

因为当  $0 < x < \frac{1}{a}$  时  $h'(x) < 0$ 、当  $x > \frac{1}{a}$  时  $h'(x) > 0$ , 5 分

所以  $h(x)_{\min} = h\left(\frac{1}{a}\right)$ ,

又因为  $h(1) = a - a - \ln 1 = 0$ ,

所以  $\frac{1}{a} = 1$ , 解得  $a = 1$ ; 6 分

另解: 因为  $f(1) = 0$ , 所以  $f(x) \geq 0$  等价于  $f(x)$  在  $x > 0$  时的最小值为  $f(1)$ ,

所以等价于  $f(x)$  在  $x = 1$  处是极小值,

所以解得  $a = 1$ ;

(2) 证明: 由 (1) 可知  $f(x) = x^2 - x - x \ln x$ ,  $f'(x) = 2x - 2 - \ln x$ , 7 分

令  $f'(x) = 0$ , 可得  $2x - 2 - \ln x = 0$ , 记  $t(x) = 2x - 2 - \ln x$ , 则  $t'(x) = 2 - \frac{1}{x}$ ,

令  $t'(x) = 0$ , 解得:  $x = \frac{1}{2}$ , 8 分

所以  $t(x)$  在区间  $(0, \frac{1}{2})$  上单调递减, 在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  上单调递增,

所以  $t(x)_{\min} = t\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 - 1 < 0$ , 从而  $t(x) = 0$  有解, 即  $f'(x) = 0$  存在两根

$x_0, x_2$ ,

且不妨设  $f'(x)$  在  $(0, x_0)$  上为正、在  $(x_0, x_2)$  上为负、在  $(x_2, +\infty)$  上为正,

所以  $f(x)$  必存在唯一极大值点  $x_0$ , 且  $2x_0 - 2 - \ln x_0 = 0$ ,

所以  $f(x_0) = x_0^2 - x_0 - x_0 \ln x_0 = x_0^2 - x_0 + 2x_0 - 2x_0^2 = x_0 - x_0^2$ , 10 分

由  $x_0 < \frac{1}{2}$  可知  $f(x_0) < (x_0 - x_0^2)_{\max} = -\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ;

由  $f'\left(\frac{1}{e}\right) < 0$  可知  $x_0 < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ , 11 分

所以  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递增, 在  $(x_0, \frac{1}{e})$  上单调递减,

所以  $f(x_0) > f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e^2}$ ;

综上所述,  $f(x)$  存在唯一的极大值点  $x_0$ , 且  $e^{-2} < f(x_0) < 2^{-2}$ . 12 分