

# 2024 届普通高等学校招生全国统一考试 联考答案

## 数学(北师大版)

1.C 【解析】由题意得,  $a+i=1+b+(b-1)i$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则

$$\begin{cases} a=1+b, \\ 1=b-1, \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} a=3, \\ b=2, \end{cases} \therefore a+b=5. \text{ 故选 C.}$$

2.B 【解析】平均数为 4 时,  $m=9$ , A 正确; 分别对  $m>5$ ,  $m=5$ ,  $m<5$  三种情形分析可知 B 错误; 当  $m=1$  时, 众数可以是 1, 故 C 正确; 设总体平均数为  $a$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } s^2 &= \frac{1}{5} [(1-a)^2 + (2-a)^2 + (3-a)^2 + (5-a)^2 + \\ & (m-a)^2] \geq \frac{1}{5} [(1-a)^2 + (2-a)^2 + (3-a)^2 + \\ & (5-a)^2] = \frac{1}{5} (4a^2 - 22a + 39), \text{ 故当且仅当 } a = \\ & m = \frac{11}{4} \text{ 时, } s^2 \text{ 取得最小值, D 正确.} \end{aligned}$$

故选 B.

3.C 【解析】由点  $(2, 3)$  在直线  $l: ax+by+1=0$  上得,  $2a+3b+1=0$ , 故点  $(a, b)$  一定在直线  $2x+3y+1=0$  上. 故选 C.

4.B 【解析】根据点到直线的距离公式可得, 对于 A,

$$\text{点 } M、\text{点 } O \text{ 到直线 } x-y+\sqrt{2}=0 \text{ 的距离为 } \frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1,$$

A 错误; 对于 B, 点  $M$  到直线  $x+y+\sqrt{2}=0$  的距

$$\text{离为 } \frac{|\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 3, \text{ B 正确; 对于 C, 点 } M、\text{点 } O$$

$$\text{到直线 } x+y-\sqrt{2}=0 \text{ 的距离为 } \frac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1, \text{ C 错误; 对}$$

于 D, 点  $M、\text{点 } O$  到直线  $x-y-\sqrt{2}=0$  的距离为

$$\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1, \text{ D 错误.}$$

故选 B.

5.B 【解析】由题意知  $x+ky-2-3k=0$  可化为  $k(y-3)=-(x-2)$ , 则直线恒过定点  $(2, 3)$ , 验证选项得直线  $l$  的方程可以为  $2x-y-1=0$ . 故选 B.

6.D 【解析】由题意直线方程可化为  $k(y-3)=-(x-2)$ , 则直线恒过定点  $(2, 3)$ , 此点不在圆内. 直线  $x+ky-2-3k=0$  与圆  $x^2+y^2=r^2 (r>0)$  相切,

故  $r^2 \leq 2^2 + 3^2 = 13$ , 即  $r \leq \sqrt{13}$ , 即当  $(2, 3)$  为切点时,  $r$  取最大值  $\sqrt{13}$ . 故选 D.

7.C 【解析】由题意得直线的斜率一定存在, 设为  $k$ , 则  $k=t^2-1 \in [-1, +\infty)$ , 则  $k=\tan \theta \geq -1$ ,

$$\text{故 } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right).$$

故选 C.

8.A 【解析】由题意可知,  $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}$ ,

$$b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{mn}}, \text{ 因为 } 0 < m < n < 1, \text{ 由基本不等式得,}$$

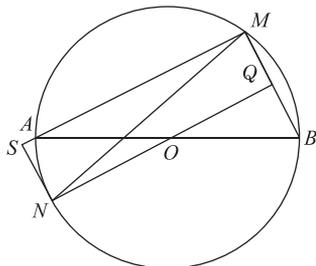
$$\frac{m+n}{2} > \sqrt{mn}, \text{ 则 } 0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{mn}} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 =$$

1, 即  $0 < a < b < 1$ , 而  $c = \log_n m > \log_n n = 1$ , 故  $a < b < c$ . 故选 A.

9.C 【解析】若直线  $l$  的斜率不存在, 则  $l$  的方程为  $x=3$ , 圆心  $(0, 2)$  到  $l$  的距离为 3, 易求得弦长为 8, 符合题意; 若直线  $l$  的斜率存在, 设  $l$  的方程为  $y=k(x-3)$ , 即  $kx-y-3k=0$ , 故圆心  $(0, 2)$  到  $l$  的距离  $d = \frac{|-2-3k|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{5^2-4^2} = 3$ , 则  $k = \frac{5}{12}$ , 则  $l$  的方程为  $5x-12y-15=0$ . 综上, 直线  $l$  的方程为  $5x-12y-15=0$  或  $x=3$ .

故选 C.

10.D 【解析】取  $MB$  的中点为  $Q$ , 连接  $NQ$ , 作  $NS \perp MA$  于点  $S$ , 如图,



$$\text{则 } \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MB}, \text{ 又 } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MB} + m \overrightarrow{MA},$$

$\angle AMB = 90^\circ$ , 故四边形  $MQNS$  为矩形, 且  $N, O,$

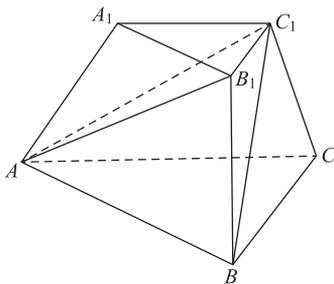
Q 三点共线, 故  $MS = NQ = ON + OQ = \frac{1}{2}AB +$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}MB = \frac{1}{2}AB + \frac{\sqrt{3}}{4}AB, \text{ 则 } m = \frac{MS}{MA} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}AB + \frac{\sqrt{3}}{4}AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}.$$

故选 D.

11.A 【解析】如图,



平面  $ABC_1$ 、平面  $AB_1C_1$  将三棱台分为三部分,  
设三棱台的高为  $h$ ,  $S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_1$ ,  $S_{\triangle ABC} = S$ ,

$$\text{故 } V_{A-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}S_1h, V_{C_1-ABC} = \frac{1}{3}Sh.$$

$$\text{由 } V_{ABC-A_1B_1C_1} = V_{A-A_1B_1C_1} + V_{C_1-ABC} + V_{ABB_1C_1}, \text{ 得}$$

$$\frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{SS_1}) = \frac{1}{3}hS + \frac{1}{3}hS_1 + V_{ABB_1C_1},$$

$$\text{故 } V_{ABB_1C_1} = \frac{1}{3}h\sqrt{SS_1} = \frac{2}{7} \times \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{SS_1}),$$

$$\text{故 } \sqrt{SS_1} = \frac{2}{7}(S + S_1 + \sqrt{SS_1}),$$

$$\text{故 } 2 \cdot \frac{S_1}{S} - 5\sqrt{\frac{S_1}{S}} + 2 = 0,$$

$$\text{由 } S_1 < S, \text{ 得 } \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}.$$

故选 A.

12.B 【解析】对于①,  $[f(n)]^2 = n + 1 - n$ , 故  $f(n) =$

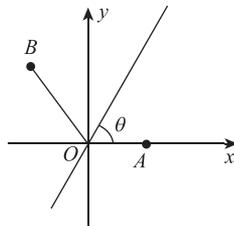
1, ①正确; 对于②,  $S_n = \pi n$ , 易知  $\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}$  不是定值, ②错误; 对于③, 设两条切线的夹角为  $\theta$ , 则  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 故  $\frac{\theta}{2} = 45^\circ$ , 即  $\theta = 90^\circ$ , 故③正确; 对于④,

$$\sin \frac{30^\circ}{2} = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \sqrt{\frac{m}{n}}, \text{ 故 } \frac{m}{n} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4},$$

故  $n(2 - \sqrt{3}) = 4m$ , 此方程显然对正整数  $m, n$  不成立, 故④错误, 故正确命题的个数是 2. 故选 B.

13.-2 【解析】由  $l_1 \parallel l_2$  得,  $a^2 = 4$ , 则  $a = \pm 2$ , 经检验  $a = 2$  时,  $l_1, l_2$  重合, 故  $a = -2$ .

14.  $y = 2x$  【解析】由题意, 可设  $\angle AOB$  的平分线的倾斜角为  $\theta$ , 如图,



$$\text{则 } \tan 2\theta = k_{OB} = -\frac{4}{3}, \text{ 即 } \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{则 } \tan \theta = 2 \text{ 或 } -\frac{1}{2}, \text{ 又 } 0 < 2\theta < \pi, \text{ 故 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

故  $k = \tan \theta = 2$ ,

故  $\angle AOB$  的平分线所在直线的方程为  $y = 2x$ .

15.  $2\sqrt{2}$  【解析】由  $f(a \sin \theta) + f(b \cos \theta - 2) \geq 0$  可得

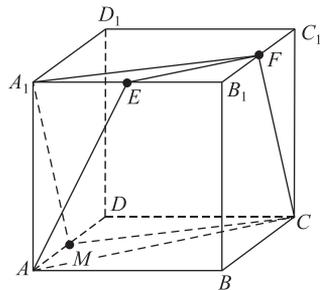
$f(a \sin \theta) \geq -f(b \cos \theta - 2) = f(2 - b \cos \theta)$ , 则根据函数在  $\mathbf{R}$  上单调递减可得  $a \sin \theta \leq 2 - b \cos \theta$ , 则  $a \sin \theta + b \cos \theta \leq 2$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立, 化简得  $\sqrt{a^2 + b^2} \cdot$

$\sin(\theta + \varphi) \leq 2$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立, 其中  $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ ,

故  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq 2$ , 而  $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{2}$ , 则  $a +$

$b \leq 2\sqrt{2}$ , 则  $a + b$  的最大值为  $2\sqrt{2}$ .

16. ③④ 【解析】根据题意, 连接  $AE, CF, EF, AC, A_1F$ , 如图.



对于①, 易知  $EF \parallel AC$ , 故  $AE, CF$  共面且相交, 故①错误; 对于②, 若过  $AE$  的平面与  $CF$  垂直, 则必有  $AE \perp CF$ , 而  $AE$  与  $CF$  不垂直, 故②错误; 对于③, 取  $AD$  的中点为  $M$ , 连接  $CM, A_1M$ , 易证  $CM \parallel A_1F$ ,  $M$  在平面  $A_1FC$  内, 故③正确; 对于④,  $AE$  与  $C_1D_1$  所成的角即为  $\angle EAB$ ,  $\cos \angle EAB =$

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 故④正确. 故正确命题的序号为③④.

17. 解: (1) 由题意知,  $f(x) = \left[ \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right] \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}$ ,

令  $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 则  $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ ,

故函数  $f(x)$  的对称中心为  $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) (k \in \mathbf{Z})$ .

(2) 由  $f(A) = \frac{1}{2} \sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$  可得,

$\sin\left(2A + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ,

故  $2A + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 则  $A = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ , 又

$A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 故取  $k=1$ , 则  $A = \frac{\pi}{3}$ ,

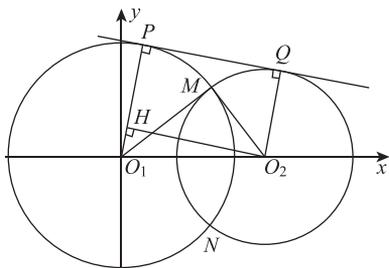
由余弦定理可知  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc$ , 即  $bc \leq 3$ ,

当且仅当  $b=c=\sqrt{3}$  时等号成立.

故  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \leq \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ,

则  $\triangle ABC$  面积的最大值为  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ .

18. 解: (1) 如图,



由题意可知,  $O_1M$  与圆  $O_2$  相切,  $O_2M$  与圆  $O_1$  相切,

且  $MO_1 \perp MO_2$ ,

故  $|MO_1|^2 + |MO_2|^2 = 9$ ,

即  $r_1^2 + r_2^2 = 9$ .

(2) 作  $O_2H \perp O_1P$  于点  $H$ , 连接  $PQ$ ,

在  $\triangle O_1O_2H$  中,  $|O_2H|^2 = |O_1O_2|^2 - |O_1H|^2$ ,

其中  $|O_2H| = |PQ|$ ,  $|O_1H| = |r_1 - r_2|$ ,

故  $|PQ|^2 = 9 - (r_1 - r_2)^2 = 9 - (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) = 2r_1r_2$ ,

又  $2r_1r_2 \leq r_1^2 + r_2^2 = 9$ ,

当且仅当  $r_1 = r_2$  时取等号,

故  $|PQ| \leq 3$ ,

即  $|PQ|$  的最大值为 3.

19. 解: (1) 由题意得圆心  $M$  的坐标为  $(-1, 1)$ ,

又  $A(-2, 4)$ , 故  $|AM|^2 = 10$ ,

因为切线长 3, 所以  $|AM|^2 - r^2 = 3^2$ ,

所以  $r=1$ .

(2) 设  $Q(x_0, y_0)$ , 则  $y_0 = \frac{1}{x_0}$ ,

故  $|MQ|^2 = (x_0 + 1)^2 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right)^2 = x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} + 2\left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right) + 2 = \left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right)^2 + 2\left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right) + 4 = \left(x_0 - \frac{1}{x_0} + 1\right)^2 + 3 \geq 3$ ,

当且仅当  $x_0 - \frac{1}{x_0} + 1 = 0$ , 即  $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  时取等号,

故  $|MQ|$  的最小值为  $\sqrt{3}$ ,

故  $|PQ|$  的最小值为  $\sqrt{3}-1$ .

20. 解: (1) 设  $P(x_0, y_0), Q(x, y)$ , 则  $\begin{cases} x_0 + 1 = 2x, \\ y_0 = 2y, \end{cases}$

即  $\begin{cases} x_0 = 2x - 1, \\ y_0 = 2y, \end{cases}$

代入  $(x_0 + 1)^2 + y_0^2 = 36$  整理得,  $x^2 + y^2 = 9$ ,

故动点  $Q$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 = 9$ .

(2) 设  $S(x', y')$ , 则  $\frac{\sqrt{(x'-1)^2 + y'^2}}{\sqrt{(x'-b)^2 + y'^2}} = k (k > 0)$ ,

整理得  $(1 - k^2)(x'^2 + y'^2) + 2(k^2b - 1)x' + 1 - b^2k^2 = 0$ ,

其中  $x'^2 + y'^2 = 9$ ,

故  $10 - 9k^2 - b^2k^2 + 2(k^2b - 1)x' = 0$ ,

当且仅当  $\begin{cases} 10 - 9k^2 - b^2k^2 = 0 (*) \\ k^2b - 1 = 0 (**) \end{cases}$  时上式恒成立,

由  $(**)$  式得  $k^2 = \frac{1}{b}$ ,

代入(\*)式得  $10 - \frac{9}{b} - b = 0$ ,

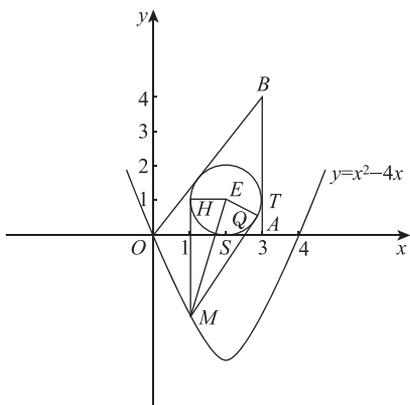
解得  $b=1$  或  $9$ ,

当  $b=1$  时,  $k=1$ , 不合题意, 舍去;

当  $b=9$  时,  $k=\frac{1}{3}$ , 符合题意.

故  $b=9, k=\frac{1}{3}$ .

21. 解: (1) 设圆  $E$  的切线  $OA, AB$  分别切圆于  $S, T$  两点, 圆  $E$  的半径为  $r$ , 如图,



$$|SA| + |AT| = 2r = |OA| + |AB| - |OB| = 3 + 4 - 5 = 2,$$

则  $r=1$ , 故  $E$  点的坐标为  $(2, 1)$ ,

则圆  $E$  的标准方程为  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ .

(2) 设  $\angle HMQ = 2\theta, M(x_0, y_0)$ ,

由  $\triangle HEM \cong \triangle QEM$  可知,  $\angle HME = \angle QME = \theta$ ,

$$\text{则 } \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2 \cdot \frac{1}{|EM|^2},$$

则当  $|EM|^2$  最小时,  $\cos 2\theta$  最小.

$$\text{因为 } y_0 = x_0^2 - 4x_0 = (x_0 - 2)^2 - 4,$$

$$\text{所以 } (x_0 - 2)^2 = y_0 + 4,$$

$$\text{所以 } |EM|^2 = (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 = y_0 + 4 +$$

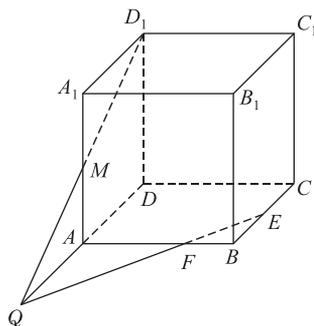
$$(y_0 - 1)^2 = y_0^2 - y_0 + 5 = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} \geq \frac{19}{4},$$

当且仅当  $y_0 = \frac{1}{2}$  时取等号,

$$\text{故 } \cos 2\theta \geq 1 - 2 \times \frac{4}{19} = \frac{11}{19},$$

即  $\cos \angle HMQ$  的最小值为  $\frac{11}{19}$ .

22. 解: (1) 连接  $D_1M$ , 并延长  $D_1M, DA$  交于点  $Q$ , 连接  $QE$ , 则  $QE$  与  $AB$  的交点即为点  $F$ , 如图,



易得  $\triangle AQF \sim \triangle BEF$ ,

$$\text{又 } \frac{AM}{A_1M} = \frac{AQ}{A_1D_1}, \text{ 则 } AQ = A_1D_1 = 2EB,$$

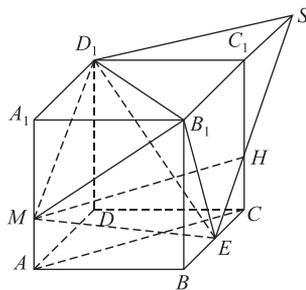
$$\text{则 } \frac{AF}{FB} = \frac{AQ}{EB} = 2.$$

(2) 证明: 设正方体棱长为  $a, A_1M = t$ ,

易得  $HE \parallel MD_1$ , 则  $\triangle ECH \sim \triangle D_1A_1M$ ,

$$\text{故 } CH = \frac{t}{2}, C_1H = a - \frac{t}{2}.$$

延长  $B_1C_1, EH$  交于点  $S$ , 连接  $D_1S, AC$ , 如图,



$$\text{易得 } \triangle HC_1S \sim \triangle HCE, \text{ 则 } \frac{C_1S}{CE} = \frac{C_1H}{HC} = \frac{a - \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} =$$

$$\frac{2a - t}{t}, \text{ 则 } C_1S = \frac{a(2a - t)}{2t},$$

又  $ES \parallel MD_1$ , 则  $V_{B_1 - D_1ME} = V_{E - B_1D_1M} = V_{S - B_1D_1M} =$

$$V_{M - B_1D_1S} = \frac{1}{3} \cdot A_1M \cdot S_{\triangle B_1D_1S} = \frac{1}{3} \cdot t \cdot$$

$$\frac{1}{2} \left[ a + \frac{a(2a - t)}{2t} \right] \cdot a = \frac{2}{9} a^3,$$

$$\text{化简得 } t = \frac{2a}{3}, \text{ 则 } CH = \frac{a}{3}, MA = \frac{a}{3},$$

故  $CH \parallel MA$ , 则四边形  $MACH$  为平行四边形,

则  $MH \parallel AC, MH \not\subset$  平面  $ABCD, AC \subset$  平面  $ABCD$ ,

则  $MH \parallel$  平面  $ABCD$ .