**杭州二中2022学年第二学期高三年级3月考试**

**数学试卷**

**第I卷（选择题）**

**一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 已知集合，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据对数函数的定义域，先求出集合，然后利用并集的运算即可求解.

【详解】因为集合，

又因为集合，由并集的概念可知，

，

故选：.

2. 已知复数的实部为，则的值为（ ）

A. 2 B. 4 C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】先利用复数的四则运算得出，然后根据题意即可求解.

【详解】复数，

因为复数的实部为，所以，则，

故选：.

3. 已知圆锥的侧面展开图是一个半径为4，弧长为的扇形，则该圆锥的表面积为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】圆锥的侧面展开图是一个半径为4，弧长为的扇形，可知底面圆的半径，再求的底面圆的面积和圆锥的侧面积，即可求得该圆锥的表面积.

【详解】由于圆锥的侧面展开图是一个半径为4，弧长为的扇形，

则圆锥底面圆的半径为，底面圆的面积为，

圆锥的表面积为.

故选：C.

4. 2022年10月22日，中国共产党第二十次全国代表大会胜利闭幕．某班举行了以“礼赞二十大、奋进新征程”为主题的联欢晚会，原定的5个学生节目已排成节目单，开演前又临时增加了两个教师节目，如果将这两个教师节目插入到原节目单中，则这两个教师节目相邻的概率为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】先插入第一个节目，再插入第二个节目，再按照分步乘法计数原理分别计算插入的情况数量及这两个教师节目恰好相邻的情况数量,再应用古典概率公式求概率即可.

【详解】由题意可知，先将第一个教师节目插入到原节目单中，有6种插入法，

再将第二个教师节目插入到这6个节目中，有7种插入法，

故将这两个教师节目插入到原节目单中，共有（种）情况，

其中这两个教师节目恰好相邻的情况有（种），所以所求概率为.

故选:D.

5. 已知，，，，过点作垂直于点，点满足，则的值为（ ）

A.  B. 

C.  D. 

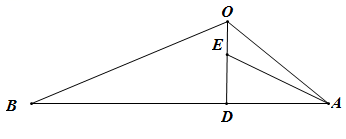
【答案】D

【解析】

【分析】

作出图形，由平面向量数量积的定义及余弦定理可得，再由平面向量数量积的运算律即可得解.

【详解】由题意，作出图形，如图，



，，

，，

由可得，

，

又，则，

.

故选：D．

6. 已知，则的大小关系为（ ）

A.  B. 

C  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】化简由题意，可得，构造，得到则，再令，求得函数的单调性，结合单调性，即可求解.

【详解】由题意，可得，

所以令，则，

令，则，

所以上单调递减，，所以恒成立，

所以在上单调递减，

因为，所以，即，

所以，所以，即.

故选：A.

7. 已知，是椭圆和双曲线的公共焦点，*P*是它们的一个公共点，且，则椭圆和双曲线的离心率乘积的最小值为（ ）

A  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据双曲线以及椭圆的定义可得，，进而在焦点三角形中运用余弦定理即可得，结合均值不等式即可求解.

【详解】如图，设椭圆的长半轴长为，双曲线的半实轴长为，

则根据椭圆及双曲线的定义：

，，，，

设，，则：在△中由余弦定理得，

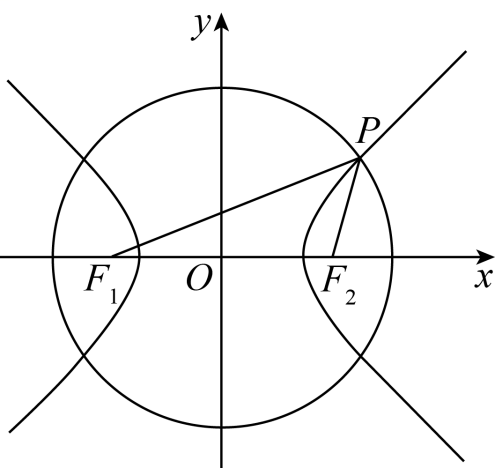
，

化简得：，即，

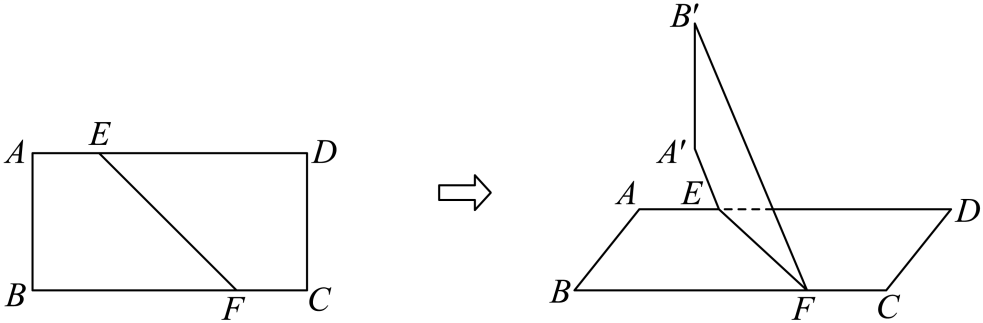
又，，即，

即椭圆和双曲线的离心率乘积的最小值为．

故选：B



8. 已知在矩形中，，，，分别在边，上，且，，如图所示，沿将四边形翻折成，设二面角的大小为，在翻折过程中，当二面角取得最大角，此时的值为（ ）



A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】过作的垂线交与，交于，于，然后利用定义法可得为二面角的平面角，设，可得，，从而，然后求函数最大值时的值即可.

【详解】过作的垂线交与，交于，于，

设在平面内的投影为，则在直线上，

过作的垂线，垂足为，则为二面角的平面角，

设，由题意，，

则，

由，，得，

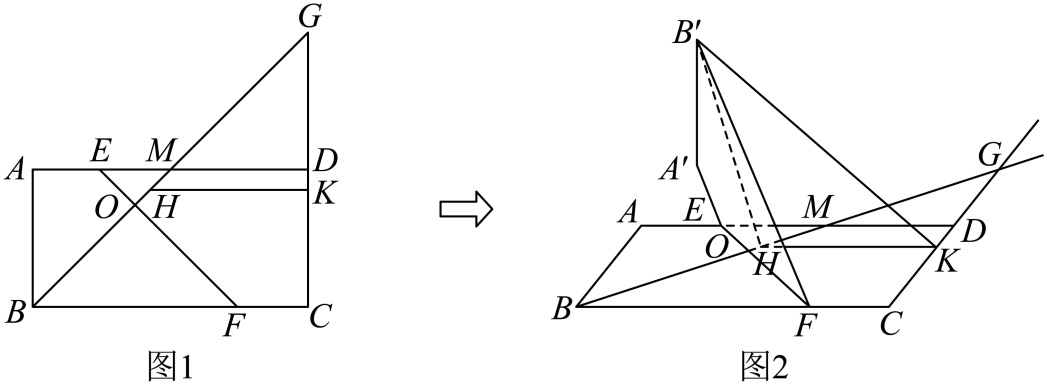
所以，

所以，

令，可得，则，

所以，当即，也即时，取到最大值，

此时最大，即二面角取得最大角.



故选：B

**二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.**

9. 下列说法正确的是（ ）

A. 用简单随机抽样从含有50个个体的总体中抽取一个容量为10的样本，个体被抽到的概率是0.2

B. 已知一组数据1，2，*m*，6，7的平均数为4，则这组数据的方差是5

C. 数据27，12，14，30，15，17，19，23的50%分位数是17

D. 若样本数据，，…，的标准差为8，则数据，，…，的标准差为16

【答案】AD

【解析】

【分析】利用概率对于即可判断A；根据平均数求得的值，然后利用方差公式求解即可判断B；根据百分位数的求法即可判断C；利用方差公式求解即可判断D.

【详解】对于A，一个总体含有50个个体，某个个体被抽到的概率为，

以简单随机抽样方式从该总体中抽取一个容量为10的样本，

则指定的某个个体被抽到的概率为 ，故A正确；

对于B，数据1，2，，6，7的平均数是4，，

这组数据方差是，故B错误；

对于C，8个数据50百分为，第50百分位数为，故C错误；

对于D，依题意，，则，

所以数据的标准差为16，D正确；

故选：AD.

10. 已知函数，下列关于该函数结论正确的是（ ）

A. 的图象关于直线对称 B. 的一个周期是

C. 的最大值为 D. 是区间上的减函数

【答案】BC

【解析】

【分析】利用诱导公式判断与是否相等判断A，判断与是否相等判断B，利用三角函数及复合函数的单调性判断CD.

【详解】由，

对于A，，故A不正确；

对于B，，故B正确；

对于C，因为，所以的最大值为，

当时，，取得最大值，

所以的最大值为，故C正确；

对于D，，又函数连续，故D错误；

故选：BC

11. 已知正四棱锥的所有棱长均为，，分别是，的中点，为棱上异于，的一动点，则以下结论正确的是（ ）

A. 异面直线、所成角的大小为

B. 直线与平面所成角的正弦值为

C. 周长的最小值为

D. 存在点使得平面

【答案】BC

【解析】

【分析】根据空间中异面直线所成角，直线与平面所成角的定义，空间中折叠问题以及垂直关系的判定与性质，逐个选项运算求解即可．

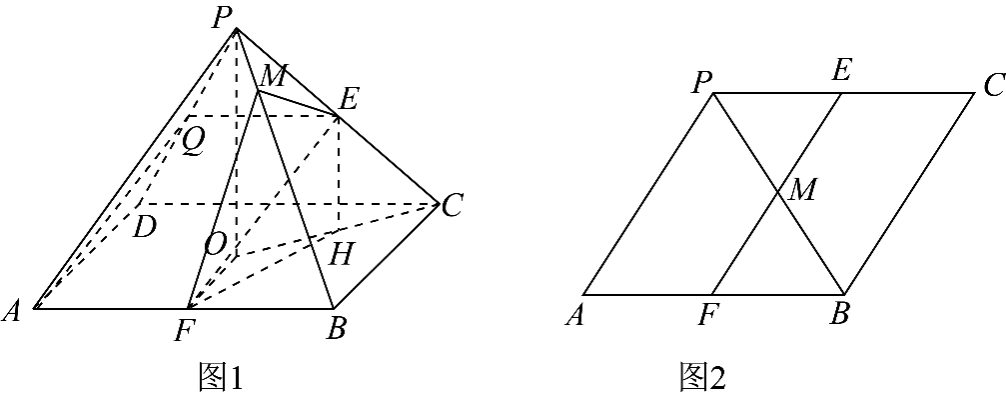
【详解】如图，取的中点，连接，，

因为，分别是，的中点，

所以，且，所以四边形为平行四边形，

则，又正四棱锥的所有棱长均为，

则，所以异面直线，所成角为，故A错误；



设正方形的中心为，连接，，

则平面，，

设的中点为，连接，，

则，且平面，

所以为直线与平面所成角，所以，

中，，，，

所以由余弦定理可得，所以 ，

所以，故B正确；

将正和沿翻折到一个平面内，如图，

当，，三点共线时，取得最小值，

此时，点为的中点，，

所以周长的最小值为，故C正确；

若平面，则，此时点为上靠近点的四等分点，

而此时，与显然不垂直，故D错误；

故选：BC．

12. 已知定义域为的函数在上单调递增，，且图像关于对称，则（ ）

A.  B. 周期

C. 在单调递减 D. 满足

【答案】AC

【解析】

【分析】根据题意化简得到，得到的周期为,结合，求得，得到A正确，B错误；再由的对称性和单调性，得出在单调递减，可判定C正确；根据的周期求得，，，结合特殊函数的图象，可判定D不正确.

【详解】由，可得的对称轴为，所以

又由知：，

因为函数图像关于对称，即，故，

所以，即，

所以，所以的周期为,所以，所以，故A正确，B错误；

因为在上单调递增，且，所以在上单调递增，

又图像关于对称，所以在上单调递增，

因为关于对称，所以在上单调递减，

又因为关于对称，可得函数在单调递减，故C正确；

根据的周期为，可得，

因为关于对称，所以且，

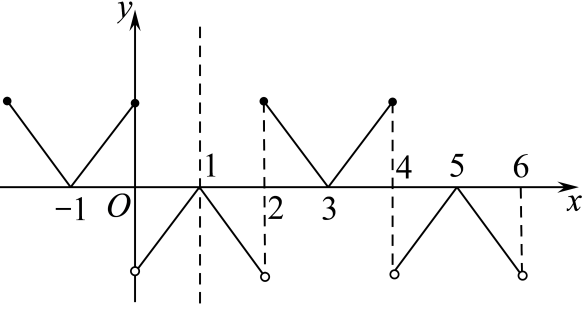
即，

由函数在上单调递减，且关于对称，可得在上单调递增，

如图所示的函数中，此时，

所以不正确.

故选：AC.



【点睛】规律探求：对于函数的基本性质综合应用问题解答时，涉及到函数的周期性有时需要通过函数的对称性得到，函数的对称性体现的是一种对称关系，而函数的单调性体现的时函数值随自变量变化而变化的规律，因此在解题时，往往西药借助函数的对称性、奇偶性和周期性来确定另一区间上的单调性，即实现区间的转换，再利用单调性解决相关问题.

**第II卷（非选择题）**

**三、填空题：本题共4小题，每题5分，共20分.**

13. 已知抛物线*E*：的焦点为，过点的直线与抛物线交于两点，与准线交于点，为的中点，且，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】##1.5

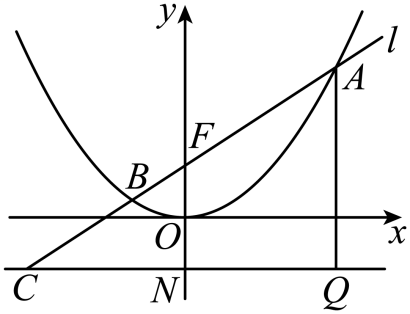
【解析】

【分析】利用抛物线的定义结合三角形中位线定理求解即可.

【详解】设轴交准线于，过作准线的垂线，垂足为，因为为的中点，且，

则由抛物线的定义可得，

在中，，所以，



故答案为：

14. 在的展开式中的系数为，则\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】2

【解析】

【分析】

首先求出的展开项中的系数，然后根据系数为即可求出的取值.

【详解】由题知，

当时有，

解得.

故答案为：.

【点睛】本题主要考查了二项式展开项的系数，属于简单题.

15. 已知正实数满足，则的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据不等式特征可通过构造函数，利用函数单调性解不等式可得，再根据基本不等式即可求得的最小值是.

【详解】由题意可得将不等式变形成；

又因为都是正数，所以；

可构造函数，易知函数为增函数，

由可得，

即，根据函数单调性可得，

则，

当且仅当，即取等号，

因此的最小值是.

故答案为：

16. 函数，其中为实数，且.已知对任意，函数有两个不同零点，的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】由题意可得有两个不相等的实根，利用换元法，分离参数，令，则，再利用导函数求的最小值即可.

【详解】因为有两个不同零点有两个不相等的实根，

即有两个不相等的实根，

令，则 ，显然不为零，所以 ，

因为， ，所以，所以 ，

令，则，

令 ，则 ，

所以在上单调递增，又，

所以当时， ；当 时，，

所以当时， ；当 时，，

故在上单调递减，在上单调递增，

所以 ，所以 ，

又，所以 ，所以 即 ， ，

又 ，所以，

故答案为：

【点睛】利用换元法，令，根据不为零，分离参数得，构造函数，通过求解函数的最值，即可得出的取值范围.

**四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. 已知分别为内角的对边，若同时满足下列四个条件中的三个：①；②；③；④．

（1）满足有解三角形的序号组合有哪些？

（2）请在（1）所有组合中任选一组，求对应的面积．

【答案】（1）序号组合为①②③，①②④

（2）答案不唯一，具体见解析

【解析】

【分析】（1）判断出③，④不能同时存在，由此确定正确答案.

（2）选①②③，则利用余弦定理求得，进而求得三角形的面积；选①②④，则利用余弦定理求得，进而求得三角形的面积.

【小问1详解】

对于③，；

对于④，，

即，且，则，

故③，④不能同时存在，则满足有解三角形的序号组合为①②③，①②④．

【小问2详解】

选①②③：时，

由余弦定理：，

整理得：且，则，

的面积为．

选①②④：时，

由余弦定理：，

整理得：，则，

的面积．

18. 已知数列满足．

（1）求证：是等差数列；

（2）令（表示不超过的最大整数．提示：当时，），求使得成立的最大正整数的值．

【答案】（1）证明见解析

（2）9

【解析】

【分析】（1）根据递推关系，结合等差数列定义证明即可；

（2）结合（1）得，故，再根据函数的单调性得当时，，进而解时，即可得答案.

【小问1详解】

证明：因为，

所以

，

所以数列是以为首项，为公差的等差数列．

【小问2详解】

解：由（1）知，，即，

所以．

令函数，所以，

当时，单调递增；

当时，单调递减．

注意到：，两边同时取对数，即，

所以当时，，即，

特别地，时，；当时，；

当时，；当时，；

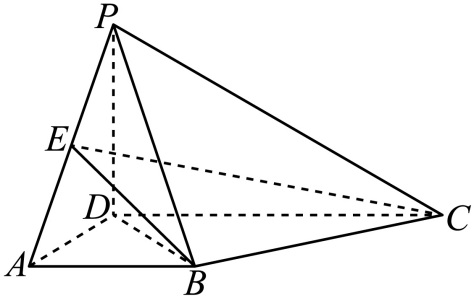
当时，，则．

显然使得成立的最大正整数的值大于5，

则时，，

所以满足条件的的最大值为9．

19. 如图，四棱锥*P*-*ABCD*的底面为梯形，底面*ABCD*，，，，*E*为*PA*的中点．



（1）证明：平面平面*BCE*；

（2）若二面角*P*-*BC*-*E*的余弦值为，求三棱锥*P*-*BCE*的体积．

【答案】（1）证明见解析；

（2）.

【解析】

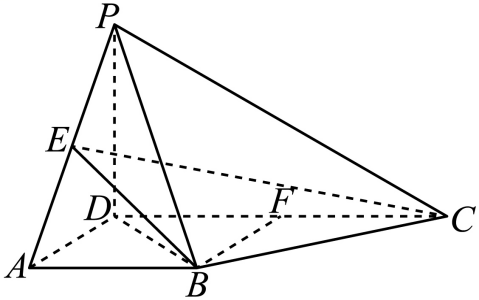
【分析】（1）线面垂直的性质可得，若为中点，连接，由正方形的性质及勾股定理可得，再由线面垂直的性质有面，最后根据面面垂直的判定证结论.

（2）构建空间直角坐标系，设求相关点坐标，再求面、面的法向量，应用空间向量夹角的坐标表示，结合二面角的余弦值求参数*m*，最后求、向量法求到面的距离，再由体积公式求棱锥的体积.

【小问1详解】

因为底面*ABCD*，面，则，

由，，则，又，则，



若为中点，连接，易知：为正方形，则，又，即，

所以，

综上，，即，

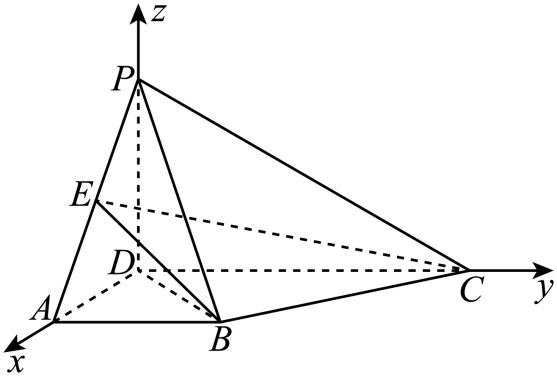
又，则面，又面，

所以平面平面*BCE*.

【小问2详解】

由题设，可构建如下图示的空间直角坐标系，若，

则，，，，，



所以，，，

若为面的一个法向量，则，令，则，

若为面的一个法向量，则，令，则，

所以，整理得，

所以，即，易得：，

由底面*ABCD*，面，则，又，即，

由，则面，面，即，

所以在直角△中，，

在△中，、、，即，则，

所以.

由上有：且面的一个法向量，

则，故到面的距离，

所以.

20. 法国数学家庞加莱是个喜欢吃面包的人，他每天都会到同一家面包店购买一个面包.该面包店的面包师声称自己所出售的面包的平均质量是1000，上下浮动不超过50.这句话用数学语言来表达就是：每个面包的质量服从期望为1000，标准差为50的正态分布.

（1）已知如下结论：若，从的取值中随机抽取个数据，记这个数据的平均值为，则随机变量.利用该结论解决下面问题.

（i）假设面包师的说法是真实的，随机购买25个面包，记随机购买25个面包的平均值为，求；

（ii）庞加莱每天都会将买来的面包称重并记录，25天后，得到的数据都落在上，并经计算25个面包质量的平均值为.庞加莱通过分析举报了该面包师，从概率角度说明庞加莱举报该面包师的理由；

（2）假设有两箱面包（面包除颜色外，其他都一样），已知第一箱中共装有6个面包，其中黑色面包有2个；第二箱中共装有8个面包，其中黑色面包有3个.现随机挑选一箱，然后从该箱中随机取出2个面包.求取出黑色面包个数的分布列及数学期望.

附：

①随机变量服从正态分布，则，；

②通常把发生概率小于的事件称为小概率事件，小概率事件基本不会发生.

【答案】（1）（i）；（ii）理由见解析.

（2）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |



【解析】

【分析】（1）（i）由正太分布的对称性及原则进行求解；（ii）结合第一问求解的概率及小概率事件进行说明；（2）设取出黑色面包个数为随机变量，则的可能取值为0,1,2,求出相应的概率，进而求出分布列及数学期望.

【小问1详解】

（i）因为，所以，因为，所以，因为，所以；

（ii）由第一问知，庞加莱计算25个面包质量的平均值为，，而，为小概率事件，小概率事件基本不会发生，这就是庞加莱举报该面包师的理由；

【小问2详解】

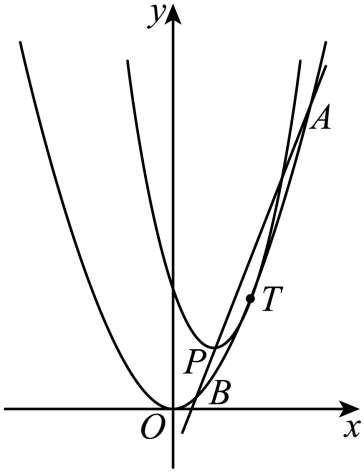
设取出黑色面包个数为随机变量，则的可能取值为0,1,2,

则；，，故分布列为：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |

其中数学期望

21. 已知抛物线，开口向上的抛物线与有一个公共点，且在该点处有相同的切线，



（1）求所有抛物线的方程；

（2）设点*P*是抛物线上的动点，且与点*T*不重合，过点*P*且斜率为的直线交抛物线于两点，其中，问是否存在实常数，使得为定值？若存在，求出实常数；若不存在，说明理由.

【答案】（1）（且

（2）存在，.

【解析】

【分析】（1）设，根据题意结合导数的几何意义，得到，再由过点，求得，即可求得抛物线的方程；

（2）根据题意得到即为公共点*T*处的切线，得出，设，求得切线方程为，联立方程组，得到，令，得到，并代入整理得，根据根与系数的关系，化简求得为定值，分和，两种情况讨论，结合，得到在点的两侧和同侧，进而得到答案.

【小问1详解】

解：设，可得，

抛物线，可得，

因为抛物线与有一个公共点，且在该点处有相同的切线，

可得，即，所以，

因为抛物线过点，代入可得，

即满足条件的

即抛物线的方程为且.

【小问2详解】

解：当时，若为常数，则，此时即为公共点*T*处的切线，

故若存在，则.

下面证明：时，为常数，

设，则切线方程为，

联立方程组，

整理得 ，

设，则，

令，可得，所以，

代入上式得，

即，

可得，所以，

则，

所以为定值，

且，

①当时，由，可得在点的两侧，所以，

令，可得，即，解得，

因为，所以为定值；

②当时，由，可得在点的同侧，所以，

因为，所以为定值，

综上可得，存在时，使得为定值.

【点睛】方法技巧：解答圆锥曲线的定点、定值问题的常见策略：

1、参数法：参数解决定点问题的思路：①引进动点的坐标或动直线中的参数表示变化量，即确定题目中核心变量（通常为变量）；②利用条件找到过定点的曲线之间的关系，得到关于与的等式，再研究变化量与参数何时没有关系，得出定点的坐标；

2、由特殊到一般发：由特殊到一般法求解定点问题时，常根据动点或动直线的特殊情况探索出定点，再证明该定点与变量无关.

22. 已知.

（1）当时，求的最大值；

（2）若存在使，得关于的方程有三个不相同的实数根，求实数的取值范围.

【答案】（1）；（2）

【解析】

【分析】（1）利用导数判断出函数的单调性，再根据函数的单调性即可求出最值.

（2）验证不是方程的根，将原方程的根等价于的根，记，，令，令，讨论的取值， 利用导数求出函数的最值，通过比较即可确定答案.

【详解】（1）当时，，

即

当时，，单调递增；

当时，，单调递减，

所以

（2），经验证不是方程的根，

所以原方程的根等价于的根，

记，，令，，单调递减，

令，即，

令为极大值点，其在上单调递增，在上单调递减，

当，，

所以在无实数根

当时，……①



有两个极值点，且，

即，

故

，所以，

存在使①有三个实根所以满足条件.

当，的分子中，，

显然，所以①仅有一个正根，

要使有两个负根，则﹐

综上所﹐即.

【点睛】本题考查了利用导数研究方程的根、利用导数求函数的最值，考查了分类讨论的思想，属于难题.