**复旦附中2023届高三年级3月份教学质量检测数学试卷**

**一、填空题（本大题共有12题，满分54分.第1-6题每题4分，第12题每题5分）**

1. 已知集合，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】计算，，再计算交集得到答案.

【详解】，

.

故.

故答案为：

2. 已知i为虚数单位，则复数的虚部为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】根据复数除法运算化简复数，进而得结果

【详解】

故答案为：

3. 已知幂函数的图像过点，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】设幂函数为，代入点计算，从而得函数解析式，再代入计算即可.

【详解】设幂函数为，由题意，，

解得，所以幂函数解析式为，

所以.

故答案为：

4. 已知，，则\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】计算得到，，利用换底公式计算得到答案.

【详解】，故，，，.

故答案为：

5. 已知直线，为使这条直线不经过第二象限，则实数范围是\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】对直线分斜率存在和不存在两种情况讨论，从而得到关于的不等式，求解不等式，即可得到答案．

【详解】若，即时，直线方程可化为，此时直线不经过第二象限，满足条件；

若，直线方程可化为，此时若直线不经过第二象限，

则且，解得.

综上满足条件的实数的范围是.

故答案为：

【点睛】本题考查直线的斜截式方程，考查分类讨论思想的运用，求解时注意对斜率分两种情况进行讨论，同时注意将答案进行整合，防止错解为.

6. 已知为实数，函数在处的切线方程为，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】##

【解析】

【分析】求解导函数，计算处的导数值，再由切线方程得切线的斜率，由导数的几何意义列式求解出的值，再根据函数解析式求解切点坐标并代入切线方程即可求解出的值，从而计算出的值.

【详解】因为，所以，

则，由处的切线方程为，

得切线的斜率为，所以，得，

所以，当时，，所以切点为，

将代入切线方程得：，

解得，所以.

故答案为：

7. 若关于的方程在上有实数根，则实数的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】利用三角函数的倍角公式,将方程整理化简,利用三角函数的图象和性质,确定条件关系,进行求解即可.

【详解】 ，

  ，

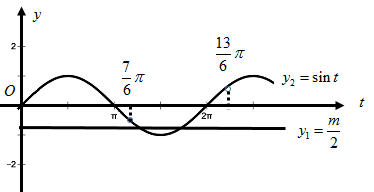
即，

  ，即，

，，

设，则在上有实数根，

 ，在的图像有交点，如图



由于

由图象可知，  ，即

故答案为：

8. 在平行六面体中，，，，则异面直线与所成角的余弦值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

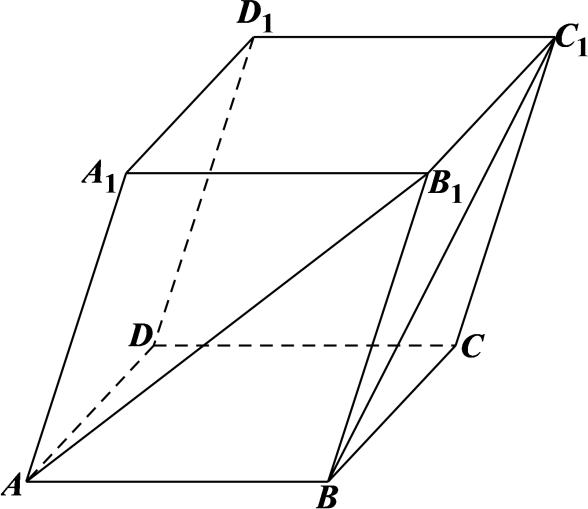
【答案】

【解析】

【分析】

利用、、表示向量、，利用空间向量数量积计算出，即可得解.

【详解】如下图所示：



，，

，，

，，

，

所以，，

因此，异面直线与所成角的余弦值是.

故答案为：.

【点睛】方法点睛：求异面直线所成角的余弦值，方法如下：

一是几何法：作—证—算；

二是向量法：把角的求解转化为向量运算，应注意体会两种方法的特点，“转化”是求异面直线所成角的关键，一般地，异面直线的夹角的余弦值为.

9. 下列说法中正确的是\_\_\_\_\_\_．

①设随机变量*X*服从二项分布，则

②已知随机变量*X*服从正态分布且，则

③小赵、小钱、小孙、小李到4个景点旅游，每人只去一个景点，设事件“4个人去的景点互不相同”，事件“小赵独自去一个景点”，则；

④，．

【答案】①②③

【解析】

【分析】根据二项分布的概率公式判断①，根据正态分布的性质判断②，根据条件概率判断③，根据期望与方差的性质判断④；

【详解】解：对于①：随机变量服从二项分布，则，故①正确；

对于②：随机变量服从正态分布且，

则，故②正确；

对于③：事件 “4个人去的景点互不相同”，事件 “小赵独自去一个景点”，

则，，所以，故③正确；

对于④：，，故④错误．

故答案为：①②③．

10. 已知抛物线*C*：的焦点为*F*，过点*F*的直线与抛物线*C*交于*A*（点*A*在第一象限），*B*两点，且，则（*O*为坐标原点）的面积是\_\_\_\_\_\_．

【答案】##

【解析】

【分析】计算出，联立直线和抛物线得到与，结合求出，进而求出的面积.

【详解】由题意可得，则，解得：，故直线方程为．

联立整理．

设，，则，．

因为，所以，所以，则，解得:，

从而，故的面积是

故答案为：．

11. 已知数列满足，且对于任意的正整数*n*，都有．若正整数*k*使得对任意的正整数成立，则整数*k*的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】由题意可得，，取倒化简可得，再利用裂项相消法即可得解.

【详解】因为，，

可得，

则有，

所以，

所以，

则

，

因为正整数*k*使得对任意的正整数成立，

所以，

所以整数*k*的最小值为.

故答案为：.

12. 已知对任意的，均有，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

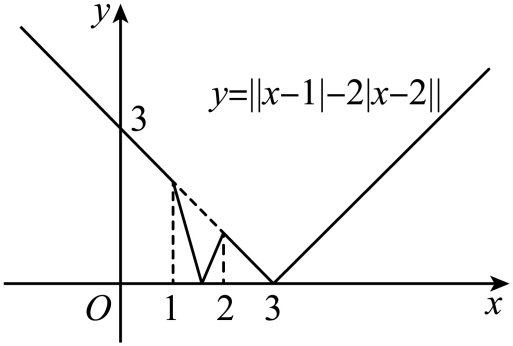
【解析】

【分析】由题意，的图像始终在的上方或部分重合，结合图像可知，，进而得解．

【详解】,



如图，作出的图像，



因，

所以的图像始终在的上方或部分重合，

所以时，，

若，则存在,根据图象，不满足题意，因此

从而，

当且仅当时取等号.

故答案为：

**二、选择题（本大题共有4题，满分18分.第13-14题每题4分，第15-16题每题5分）**

13. 设为直线，是两个不同的平面，下列命题中正确的是

A. 若，，则 B. 若，，则

C. 若，，则 D. 若，，则

【答案】B

【解析】

【详解】A中，也可能相交；B中，垂直与同一条直线的两个平面平行，故正确；C中，也可能相交；D中，也可能在平面内.

【考点定位】点线面的位置关系

14. 已知函数的图象关于点对称，将函数的图象向左平移个单位长度后得到函数的图象，则的一个单调递增区间是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】本题首先根据诱导公式和二倍角的正弦公式，化简得出，

再根据平移的左正右负的原则得到的解析式，最后得到的单调增区间.

【详解】







函数的图像关于点对称，

，，，，

，，

将函数向左平移单位的解析式是，

令,

，结合所给的选项，令，

则的一个增区间为，

故选：B.

15. 已知正实数*a*，*b*满足，则的最小值为（ ）

A.  B. 3 C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】由题设条件有，令则有、，应用基本不等式求范围且恒成立，进而求的范围，即可得结果.

【详解】由，则，且，

所以，

令，则，且，

所以，即，仅当时等号成立，

对于恒成立，仅当，即时等号成立，

综上，若，则，

而，则，只需，

所以，仅当，即时等号成立，

综上，，仅当，即时等号成立.

所以目标式最小值为.

故选：C

16. 已知，函数的定义域为的值域为的子集，则这样的函数的个数为（ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 无数个

【答案】A

【解析】

【分析】求导得到单调区间，计算极值，画出函数图像，根据则，解得或，，解得或，得到，，再计算最值得到答案.

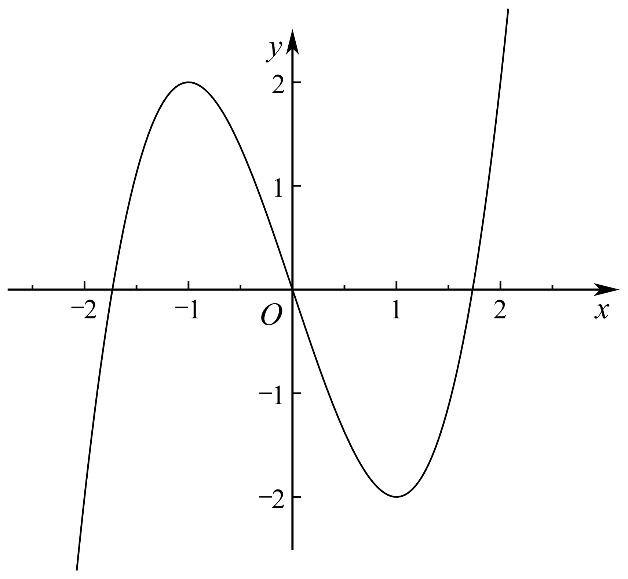
【详解】，，

当和时，，函数单调递增；

当时，，函数单调递减.

为函数的极小值，为函数的极大值，

画出函数图像，如图所示：



的值域为的子集，

则，解得或；，解得或，

，故且，，，，

当，，，故；

当，，故，此时，不成立；

当，，不成立；

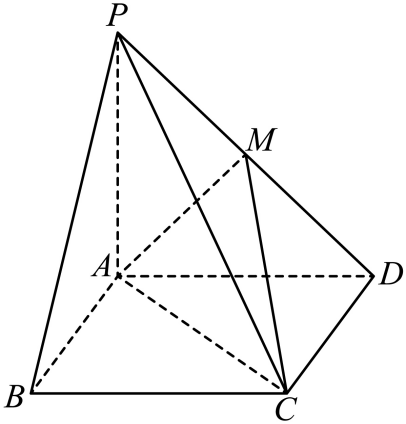
综上所述：，

故选：A

【点睛】关键点睛：本题考查了利用导数求函数的最值问题，意在考查学生的计算能力，转化能力和综合应用能力，其中利用，得到，，可以缩小范围，简化运算，是解题的关键.

**三、解答题（本大题共有5题，满分78分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.**

17. 已知在四棱锥中，底面为正方形，侧棱平面，点为中点，.



（1）求证：直线平面；

（2）求点到平面的距离.

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）连接交于点，连接，进而根据即可证明；

（2）根据题意，以为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，利用坐标法求解即可.

【小问1详解】

证明：连接交于点，连接，

因为底面为正方形，

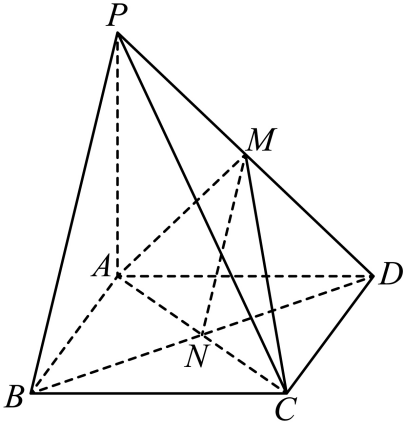
所以为的中点，

所以，在中，为的中点，为的中点，

所以；

又因为面，面，

所以平面.

【小问2详解】

解：因为平面，为正方形，平面，

所以，两两垂直，以为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，

所以，，，，，

所以，，

设平面的法向量为，

所以，，即，

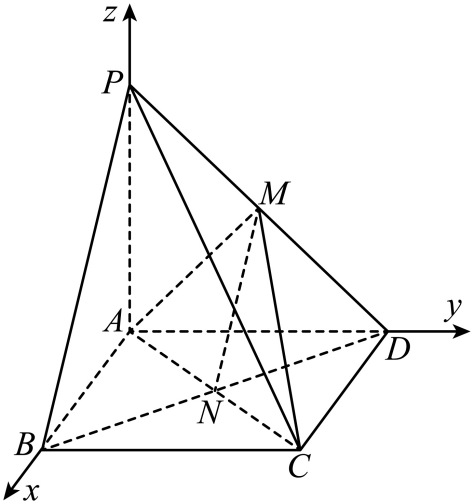
令，则，，即，

，

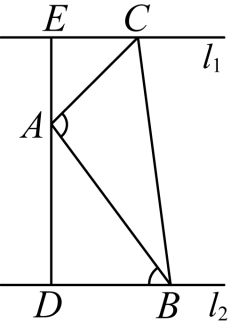
设点*P*到平面*MAC*的距离为*d*，

所以，

所以，点到平面的距离为.



18. 某学校为丰富学生的课外活动，计划在校园内增加宣外活动区域（如所示）已知教学楼用直线表示，且，*ED*是过道，*A*是之间的一定点路口，并且点*A*到的距离分别为2，6，*B*是直线上的动点，连接*AB*，过点*A*作．且使得*AC*交直线于*C*，点*B*，*C*均在*DE*的右侧，设



（1）写出活动区域的面积*S*关于角的函数表达式，并写出定义域；

（2）求的最小值．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）在中，求得，在中，求得，根据三角形的面积公式即可求解.

（2）令，利用降次化一得到，根据正弦函数的性质可求得的取值范围，最终求得的范围，从而可解.

【小问1详解】

依题意得：点*A*到的距离分别为2，6即

在中，，

，即，，

，，

在中，，

即，





即.

【小问2详解】

由（1）知，

设







，，

，



∴当，即时，函数的最小值.

19. 携号转网，也称作号码携带、移机不改号，即无需改变自己的手机号码，就能转换运营商，并享受其携号的各种服务．2019年11月27日，工信部宣布携号转网在全国范围正式启动．某运营商为提质量保客户，从运营系统中选出300名客户，对业务水平和服务水平的评价进行统计，其中业务水平的满意率为，服务水平的满意率为，对业务水平和服务水平都满意的客户有180人．

（1）完成列联表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 对服务水平满意人数 | 对服务水平不满意人数 | 合计 |
| 对业务水平满意人数 |  |  |  |
| 对业务水平不满意人数 |  |  |  |
| 合计 |  |  |  |

（2）并分析是否有的把握认为业务水平与服务水平有关；

（3）为进一步提高服务质量，在选出的对服务水平不满意的客户中，抽取2名征求改进意见，用*X*表示对业务水平不满意的人数，求*X*的分布列与期望；

附：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.01 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 |
| *k* | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.789 | 10.828 |

【答案】（1）表格见解析

（2）有 （3）分布列见解析，

【解析】

【分析】（1）分别求出对业务水平满意和对服务水平满意的人数，从而可得出列联表.

（2）先求出计算得，对照附表参照值可得出答案.

（3）由题意*X*的可能值为0，1，2，分别求出其概率，从而得出概率分布列，然后由公式可得出其数学期望.

【小问1详解】

有题意可得对业务水平满意的有人，对服务水平满意的有人，

得列联表

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 对服务水平满意人数 | 对服务水平不满意人数 | 合计 |
| 对业务水平满意人数 | 180 | 80 | 260 |
| 对业务水平不满意人数 | 20 | 20 | 40 |
| 合计 | 200 | 100 | 300 |

【小问2详解】计算得，

所以有的把握认为业务水平满意与服务水平满意有关．

【小问3详解】

*X*的可能值为0，1，2，



所以*X*的分布列如下

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
| *P* |  |  |  |

则*X*的期望

20. 椭圆的焦点是一个等轴双曲线的顶点,其顶点是双曲线的焦点，椭圆与双曲线有一个交点*P*，的周长为．

（1）求椭圆与双曲线的标准方程；

（2）点*M*是双曲线上的任意不同于其顶点的动点，设直线，的斜率分别为，求的值；

（3）过点任作一动直线*l*交椭圆于*A*、*B*两点，记．若在线段*AB*上取一点*R*，使得，试判断当直线*l*运动时，点*R*是否在某一定曲线上运动？若是，求出该定曲线的方程；若不是，请说明理由．

【答案】（1）；

（2）1； （3）是 ，

【解析】

【分析】（1）根据椭圆和双曲线的关系，结合椭圆和双曲线的性质，求得代入方程即可求解；

（2）设点，利用斜率方程求得*k1,k2*,结合双曲线方程，即可求得*k1k2*；

（3）法一：分两种情况讨论，当直线*l*的斜率为0，则，当直线*l*的斜率不为0，设直线方程并与椭圆方程联立，结合韦达定理，然后根据，联立方程即可出.

法二：直接设直线，联立椭圆方程得到韦达定理式，根据向量关系求出的表达式，设，整理得，再整体代入即可.

【小问1详解】

设椭圆的右焦点为（*c*,0）（*c*>0），则,

由题知，双曲线：,所以，即，

因为的周长为，即，

联立①②③得，，

所以椭圆的方程为，

双曲线的标准方程为

【小问2详解】

设双曲线上的点，，

则．

又



【小问3详解】

是；由题知直线*l*的斜率存在，

法一：

①当直线*l*的斜率为0时，，

，



②当直线*l*的斜率不为0时，设其方程为，

④

解得，其中，且，

，

，

由



，

所以点*R*在一条定直线上．

法二：

依题可知:直线的斜率存在,设其方程为，

，

所以,消元整理得,

所以

，

由得，所以，

设，由得,



所以，

所以在定直线上.

【点睛】方法点睛：本题采取设线法，然后联立椭圆方程得到韦达定理式，通过向量运算得到其横坐标表达式，再通过向量关系代换整理成韦达定理比值式，再将得到的韦达定理式整体代入运算即可得到该定直线方程．

21. 若函数图像上存在相异的两点*P*、*Q*，使得函数在点*P*和点*Q*处的切线重合，则称是“双切函数”，点*P*、*Q*为“双切点”，直线*PQ*为的“双切线”．

（1）若，判断函数是否为“双切函数”，并说明理由；

（2）若，证明：函数是“双切函数”，并求出其“双切线”；

（3），求证：“”是“双切函数”的充要条件是“”

【答案】（1）不是 （2）证明见解析；

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）对函数求导可的，显然为单调递增函数，不存在两个不相等的实数，使得，所以不是“双切函数”；

（2）易知函数为奇函数，为偶函数，所以必存在两个不相等的实数，且，使得，利用对称性可解得即为“双切点”， 为其“双切线”；

（3）由是“双切函数”可得存在两个不相等的实数，使得，即函数不单调，再求导利用判别式即可求得充分条件为，同时也可证明必要性成立.

【小问1详解】

根据“双切函数”的定义可知，若是“双切函数”，

则存在两个不相等的实数，使得；

由可知，；

易知为单调递增函数，

所以不存在两个不相等的实数，使得；

即不是“双切函数”.

【小问2详解】

由可得；

显然为偶函数，且在上为单调递增；

所以必存在两个不相等的实数，使得，且；

不妨设两切点分别为，

易知函数奇函数，又；

所以两切点关于原点对称；

即此时切线斜率，

即，解得或；

即存在两点满足条件，所以函数是“双切函数”，

此时，两点确定的直线方程即为“双切线”，

由直线的两点式方程可得即为函数的“双切线”.

故其“双切线”为.

【小问3详解】

充分性：

若是“双切函数”，

则需存在两个不相等的实数，使得；

令，即存在实数使得函数在定义域内有两个零点；

所以不单调，又，

即，可得，即；

所以充分性成立；

必要性：

若可得方程有两个不相等的实数根，

所以函数在定义域內不单调，

即存在两个不相等的实数满足，也即，

即函数上一定存在两点是“双切点”，

即是“双切函数”，所以必要性成立.

因此，“”是“双切函数”的充要条件是“”

【点睛】关键点点睛：本题关键在于理解“双切函数”的定义，充分利用导函数和原函数之间的对应关系，并利用导函数零点个数解决原函数不单调问题，即可实现问题求解.