2023-2024学年度(上)沈阳市五校协作体期末考试

高二年级数学试卷答案

考试时间：120 分钟　　　　考试分数：150 分

1-5：B A B A C　　6-8：C D A

9.BCD　　10.ACD　　11.ACD　　12.BD

13.3^8（或者写成 6561）　　14.$[6-\sqrt{2},6+\sqrt{2}]$

15.$[0,2\sqrt{2})$　　16.$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

17.（1）$T_{k+1}=(-1)^k\left(\dfrac{a}{2}\right)^{10-k}C_{10}^k x^{20-\frac{5}{2}k}$

$20-\dfrac{5}{2}k=0$，解得 k=8……3’

∴k=8 时，常数项$T_9=(-1)^8\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 C_{10}^8=\dfrac{45}{4}$，解得$a=1$……5’

（2）$20-\dfrac{5}{2}k=m$，$m\in Z$，则 k=0,2,4,6,8,10

∴有理项有 6 项，无理项有 5 项……7’

$C_6^1C_5^2+C_6^2C_5^1=135$……10’

18.（1）$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}$……6’

（2）由题意可得：P（1,1,2），N（0,2,4）

∴$\overrightarrow{PN}=(-1,1,2)$……8’

∴$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PN}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

所以点 N 到平面α的距离为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$……12’

19.（1）$|AB|=\sqrt{9+9-2\times3\times3\times(-\dfrac{7}{9})}=4\sqrt{2}$

∴圆心到直线的距离$d=1$……2’

当直线斜率不存在时，直线方程为$x=2$，符合题意……4’

当直线斜率存在时设直线 l 方程为 $y=k(x-2)$，则 $\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$

解得 $k=-\frac{3}{4}$，

∴直线 l 方程为 $4y+3x-6=0$ 或 $x=2$

……………………………………………………………6′

（法二）：当斜率为 0 时，圆心到直线的距离为 2 不符合题意；

当斜率不为 0 时，设直线 l 方程为 $x=my+2$，

$\therefore d=\frac{|2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

解得：$m=0$ 或 $m=-\frac{4}{3}$

∴直线方程为 $x=2$ 或 $3x+4y-6=0$ ……………………………………………………………6′

（2）设 M（x,y），根据 $CM\perp PM$ 可得：$(x-3)(x-2)+(y+2)y=0$

即 $x^2+y^2-5x+2y+6=0$ ……………………………………………………………………12′

20.（1）取 AD 的中点 O，连接 OP,OB,BD,OE，

∵底面 ABCD 为菱形，则 $AC\perp BD$，

又∵ O,E 分别为 AD,AB 的中点，则 $OE\parallel BD$，

故 $AC\perp OE$，

注意到 $AC\perp PE$，$OE\cap PE=E,OE,PE\subset$ 平面 POE，

则 $AC\perp$ 平面 POE，……………………………………………………………………………3′

∵ $OE\subset$ 平面 POE，则 $AC\perp OE$，

又∵ $PA=PD$，E 为棱 AB 的中点，则 $AD\perp OE$，

$AC\cap AD=A, AC\cap AD=A, AC, AD\subset$ 平面 $ABCD$，

∴ $OE\perp$ 平面 $ABCD$，

且 $PO\subset$ 平面 PAD，故平面 $PAD\perp$ 平面 ABCD……………………………………………………6′

（2）若 $PA=AD$，$\angle BAD=60^\circ$，则 $\triangle ABD$ 为等边三角形，且 O 为 AD 的中点，

故 $OB\perp AD$，

由（1）得，如图所示建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

设 $AD=2$，则 $P(0,0,\sqrt{3}),E(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0),D(-1,0,0)$，

可得 $\overrightarrow{DP}=\left(1,0,\sqrt{3}\right),\overrightarrow{DE}=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

设平面 PDE 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=x+\sqrt{3}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0\end{cases}$，

取 $x=\sqrt{3}$，则 $y=-3$，$z=-1$，

所以 $\vec{n}=(\sqrt{3},-3,-1)$，

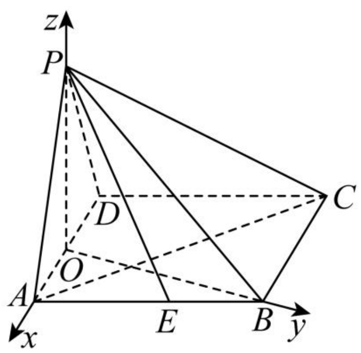
取平面 PDA 的法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$，

则 $\cos<\vec{n},\vec{m}>=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=-\frac{3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$，……………………………………………………………10′

设二面角 $E-PD-A$ 为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $\cos\theta=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，可得 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，

所以二面角 $E-PD-A$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ ……………………………………………………………12′



20.（1）设 P（x,y）：$\frac{y}{x-2}\cdot\frac{y}{x+2}=-\frac{1}{4}$

$\therefore\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\neq\pm2)$ ……………………………………………………………4′（没扣点减 1 分）

（2）设直线 l 方程为 $x=my+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立可得 $\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$

得（m^2+4）$y^2+2my-3=0$

$$\begin{cases} y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+4} \\ y_1\cdot y_2=-\dfrac{3}{m^2+4} \end{cases}$$ ……………………………………………………………………………………6′.

$AM: y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2), \therefore y_E=\dfrac{2y_1}{x_1-2}$

$AN: y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2), \therefore y_G=\dfrac{2y_2}{x_2-2}$

$y_E y_G=\dfrac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}=-3$ ……………………………………………………………………8′

设定点H（$t,0$），则$\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG}=0$，即$(4-t)(4-t)+y_E y_G=0$ ………………………10′

$\therefore (4-t)^2-3=0$

解得：$t=4\pm\sqrt{3}$

所以定点为$(4+\sqrt{3},0)$和$(4-\sqrt{3},0)$ ……………………………………………………………12′

22.（1）设P（x,y），渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，

则$d_1=\dfrac{|ay-bx|}{c}$，$d_2=\dfrac{|ay+bx|}{c}$ ……………………………………………………3′

$\therefore d_1\cdot d_2=\dfrac{|a^2y^2-b^2x^2|}{c^2}=\dfrac{a^2b^2}{c^2}$ ……………………………………………………………6′

（2）由题，双曲线方程为$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$，

设$\angle MON=\alpha$，则$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \tan\alpha=\dfrac{4}{3}$ ……………………………………………………………………………………8′

由题可知：$BM=\dfrac{d_1}{\tan\alpha}=\dfrac{3}{4}d_1$，$AN=\dfrac{d_2}{\tan\alpha}=\dfrac{3}{4}d_2$

$S_1-S_2=S_{\Delta BMP}+S_{\Delta ANP}=\dfrac{3}{8}({d_1}^2+{d_2}^2)$ ……………………………………………………10′

由（1）知$d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2b^2}{c^2} = \frac{4}{5}$

∴$S_1 - S_2 = \frac{3}{8}(d_1{}^2 + d_2{}^2) \ge \frac{3}{5}$，当且仅当$d_1 = d_2$时等号成立

综上：$S_1 - S_2 \in \left[\frac{3}{5}, +\infty\right)$ ....12’