

数学试题参考答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	D	B	D	A	B	C	D

二、多项选择题：本大题共 4 小题，共 20 分。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9	10	11	12
BD	AC	ABD	ACD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。其中第 15 题的第一个空填对得 2 分，第二个空填对得 3 分。

13. $\frac{9}{10}$ 14. 4
15. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$; 40π 16. $e^{-\frac{2}{e}} < a < 1$ 或 $1 < a < e^{\frac{2}{e}}$

(注：16 题或写成 $\{a | e^{-\frac{2}{e}} < a < 1 \text{ 或 } 1 < a < e^{\frac{2}{e}}\}$ ，或写成 $(e^{-\frac{2}{e}}, 1) \cup (1, e^{\frac{2}{e}})$)

四、解答题

17. 【解析】

- (I) A 小区当年随机抽取的 20 天数据中，供热等级达到“舒适”的有 15 天，所以可以估计 A 小区一天中供热等级达到“舒适”的概率为 $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ ， 2 分
- 那么，在当年的供热期内，
- A 小区供热等级达到“舒适”的天数约为 $172 \times \frac{3}{4} = 129$ 天 3 分

(II) 由题意，样本空间 Ω 中共有 20 个样本点，设 x_1, x_2 表示 A, B 两小区室内温度，用 (x_1, x_2) 表示可能的结果。

$C = \{(21,19), (22,19), (24,19), (21,20), (23,20), (24,20)\}$ ， $n(C) = 6$ ，

所以，事件 C 的概率 $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ 6 分

(III) (选择 A) 从供热状况角度选择生活地区居住，应建议选择 A 小区，理由如下：

- ①在 20 天的数据中， A 小区室温大于 B 小区室温的有 14 天， B 小区室温大于 A 小区室温的有 5 天，由此可以估计，每天 A 小区室温大于 B 小区室温的概率为 $P_1 = \frac{7}{10}$ ， B 小区室温大于 A 小区室温的概率为 $P_2 = \frac{1}{4}$ ， P_2 远远小于 P_1 ；
- ②随机抽取的 20 天中， A 小区室温平均数为 $\bar{T}_A = 22.05^\circ C$ ， B 小区室温平均数为 $\bar{T}_B = 20.7^\circ C$ ， $\bar{T}_A > \bar{T}_B$ ；
- ③在随机抽取的 20 天中， B 小区供热等级达到“舒适”的天数为 9 天，远小于 A 小区供热等级达到“舒适”的天数；
- ④ A 小区室温中位数为 $Z_A = 22.5^\circ C$ ， B 小区室温中位数为 $Z_B = 20^\circ C$ ， $Z_A > Z_B$ 10 分

(选择 B) 从供热状况角度选择生活地区居住，应建议选择 B 小区，理由如下：

- ①在 20 天的数据中， A 小区中存在供热不达标的情况，而 B 小区供热等级全部达标。
- ②随机抽取的 20 天中， A 小区室温平均数为 $\bar{T}_A = 22.05^\circ C$ ， B 小区室温平均数为 $\bar{T}_B = 20.7^\circ C$ ，在 \bar{T}_A, \bar{T}_B 全部达标的情况下， A 小区室温方差大于 B 小区室温方差， B 小区室温波动较小，说明 B 小区供热更加稳定。（ A 小区室温方差为 $s_A^2 \approx 7.84$ ， B 小区室温方差为 $s_B^2 \approx 4.01$ ，以上数值仅作参考，不要求计算方差具体值） 10 分

赋分说明：

- ①只做判断没能说明理由的不给分；
- ②给出一个正确理由的给 3 分，给出两个及以上正确理由的给 4 分；
- ③除以上理由外，其它符合统计概率知识的判断依据都可酌情给分。

18. 【解析】

(I) 证明:

取 BC 中点 G , 连接 AG, EG ,

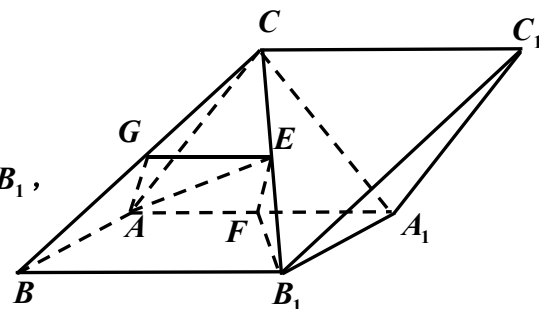
$\because E$ 为 B_1C 中点, $\therefore GE \parallel BB_1, GE = \frac{1}{2}BB_1$,

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \parallel BB_1, AA_1 = BB_1$,

$\because F$ 为 AA_1 中点, $\therefore GE \parallel AF, GE = AF$,

\therefore 四边形 $AGEF$ 为平行四边形, $\therefore EF \parallel GA$,

又 $GA \subset$ 平面 $ABC, EF \not\subset$ 平面 $ABC \therefore EF \parallel$ 平面 ABC 5 分



(II) 解:

在平行四边形 ABB_1A_1 中, $AB = AA_1, \angle ABB_1 = \frac{\pi}{3}$,

\therefore 平行四边形 ABB_1A_1 为菱形,

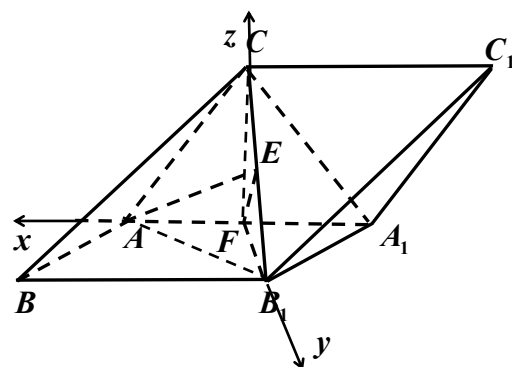
连接 AB_1 , 则 $\triangle AA_1B_1$ 为正三角形,

$\because F$ 为 AA_1 中点, $\therefore B_1F \perp AA_1$,

同理可证 $CF \perp AA_1$,

又 $B_1F \perp AC, AC \cap AA_1 = A$,

$\therefore B_1F \perp$ 平面 AA_1C_1C



\therefore 以 F 为原点, FA, FB_1, FC 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立如图所示空间直角坐

标系 $Fxyz$,

$\therefore F(0,0,0), A(1,0,0), B(2,\sqrt{3},0), B_1(0,\sqrt{3},0), C(0,0,\sqrt{3}), E(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,

$\therefore \overrightarrow{AB} = (1,\sqrt{3},0), \overrightarrow{AC} = (-1,0,\sqrt{3}), \overrightarrow{AE} = (-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, 8 分

设 $\vec{n} = (x,y,z)$ 是平面 ABC 的法向量,

$$\text{则 } \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}, \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}, \therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = x + \sqrt{3}y = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -x + \sqrt{3}z = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} x = -\sqrt{3}y, \\ x = \sqrt{3}z, \end{cases}$$

取 $z = 1$, 则 $x = \sqrt{3}, y = -1$, $\therefore \vec{n} = (\sqrt{3}, -1, 1)$ 是平面 ABC 的一个法向量,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AE}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AE}| |\vec{n}|} = \frac{-1 \times \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1}{\frac{\sqrt{10}}{2} \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{6}}{5},$$

设直线 AE 与平面 ABC 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AE}, \vec{n} \rangle| = \frac{\sqrt{6}}{5}$,

即直线 AE 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{5}$ 12 分

19. 【解析】

(I) $\because \sin^2 B + \sin^2 C - \sin B \sin C = \sin^2 A$

由正弦定理可得 $b^2 + c^2 - bc = a^2 \therefore b^2 + c^2 - a^2 = bc$

$$\text{由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$$

$\because A \in (0, \pi) \therefore A = \frac{\pi}{3}$ 5 分

设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R , 则 $R = \sqrt{3}$, 由正弦定理得 $a = 2R \sin A = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$

..... 6 分

注意: 求角未写范围扣 1 分.

(II) 由 (I) 知 $a = 3, A = \frac{\pi}{3}$, 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\text{得 } 9 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3} \therefore 9 = (b+c)^2 - 3bc$$

$$\therefore 3bc = (b+c)^2 - 9 \leq \frac{3(b+c)^2}{4}$$

$$\therefore (b+c)^2 \leq 36 \because b+c > a \therefore 3 < b+c \leq 6.$$

当且仅当 $b = c = 3$ 时取等号 8 分

又由等面积法可知 $\frac{1}{2}bcsinA = \frac{1}{2}(a+b+c)r \quad \therefore r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}bc}{a+b+c}$

$\because bc = \frac{(b+c)^2 - 9}{3}, \therefore r = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{(b+c)^2 - 9}{3}}{b+c+3} = \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c-3) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$\because 0 < b+c-3 \leq 3, \therefore 0 < \frac{\sqrt{3}}{6}(b+c-3) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore r$ 的取值范围为 $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}] \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. 【解析】

(I) $a_2 = 4 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$a_3 = 9 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(II) 由 $a_{n+1} = 2a_n - \cos \frac{n\pi}{2} + 2\sin \frac{n\pi}{2}$,

可得 $a_{n+1} + \cos \frac{n\pi}{2} = 2a_n + 2\sin \frac{n\pi}{2}$

即 $a_{n+1} + \sin \frac{(n+1)\pi}{2} = 2a_n + 2\sin \frac{n\pi}{2} = 2(a_n + \sin \frac{n\pi}{2}), (n \in N^*) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又因为 $a_1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2 \neq 0$

所以 $\{a_n + \sin \frac{n\pi}{2}\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列 $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

所以 $a_n + \sin \frac{n\pi}{2} = 2^n$, 即 $a_n = 2^n - \sin \frac{n\pi}{2}, n \in N^* \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(III) $n(a_n - 2^n) = -n\sin \frac{n\pi}{2}, (n \in N^*) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

①当 $n = 4k, (k \in N^*)$ 时,

$T_n = (-1+0+3+0)+(-5+0+7+0)+\dots+[-(n-3)+0+(n-1)+0]$

$= \underbrace{2+2+\dots+2}_{\frac{n}{4} \uparrow} = \frac{n}{2}$

令 $T_m = \frac{m}{2} = 2024$, 得 $m = 4048 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

②当 $n = 4k-1, (k \in N^*)$ 时,

$T_n = -1+0+3+(0-5+0+7)+(0-9+0+11)+\dots+[0-(n-2)+0+n]$

$= 2 + \underbrace{2+2+\dots+2}_{\frac{n-3}{4} \uparrow} = \frac{n+1}{2}$

令 $T_m = \frac{m+1}{2} = 2024$, 得 $m = 4047 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

③当 $n = 4k-2, (k \in N^*)$ 时,

$T_n = -1+0+(3+0-5+0)+(7+0-9+0)+\dots+[(n-2)+0-(n-1)+0]$

$= -1 + \underbrace{(-2)+(-2)+\dots+(-2)}_{\frac{n-2}{4} \uparrow} = -1 - \frac{n-2}{2} = -\frac{n}{2}$

令 $T_m = -\frac{m}{2} = 2024$, 得 $m = -4048$ 舍去 $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

④当 $n = 4k-3, (k \in N^*)$ 时,

$T_n = -1+(0+3+0-5)+(0+7+0-9)+\dots+(0+(n-2)+0-n)$

$= -1 + \underbrace{(-2)+(-2)+\dots+(-2)}_{\frac{n-1}{4} \uparrow} = -1 - \frac{n-1}{2} = -\frac{n+1}{2}$

令 $T_m = -\frac{m+1}{2} = 2024$, 得 $m = -4049$ 舍去 $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

综上: $m = 4048$ 或 $4047 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. 【解析】

(I) 由题可知 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2c \times b = bc = \sqrt{2} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\because \cos \angle F_1 P F_2 = \cos 2 \angle O P F_2 = 2 \cos^2 \angle O P F_2 - 1 = \frac{1}{3} \therefore \cos \angle O P F_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{在 } Rt\Delta O P F_2 \text{ 中, } \cos \angle O P F_2 = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}, c = 1$$

$$\text{即椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) (i) 当 NG 垂直于 x 轴时, 点 M 为椭圆 C 的左顶点或右顶点,

此时 $|OM| = a = \sqrt{3}$, $\because O$ 是 ΔMNG 重心, 设线段 NG 的中点为 D

$$\text{则 } |OD| = \frac{1}{2}|OM| = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore M \text{ 到直线 } NG \text{ 的距离是 } 3|OD| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(ii) 当 NG 斜率存在时, 设直线 NG 方程为 $y = kx + t (t \neq 0)$

设 $N(x_1, y_1)$, $G(x_2, y_2)$, $M(x_3, y_3)$

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得: } (2 + 3k^2)x^2 + 6ktx + 3t^2 - 6 = 0$$

$$\Delta = 24(3k^2 - t^2 + 2) > 0, \text{ 则 } 3k^2 + 2 > t^2$$

$$\text{由韦达定理得 } x_1 + x_2 = -\frac{6kt}{2 + 3k^2}, x_1 x_2 = \frac{3t^2 - 6}{2 + 3k^2} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\because O \text{ 是 } \Delta MNG \text{ 重心, } \therefore x_3 = -(x_1 + x_2) = \frac{6kt}{2 + 3k^2}$$

$$\therefore y_3 = -(y_1 + y_2) = -[k(x_1 + x_2) + 2t] = \frac{6k^2 t}{2 + 3k^2} - 2t = \frac{-4t}{2 + 3k^2}$$

$$\because M \text{ 在椭圆 } C \text{ 上 } \therefore \frac{36k^2 t^2}{3(2 + 3k^2)^2} + \frac{16t^2}{2(2 + 3k^2)^2} = 1$$

$$\text{即 } 24t^2(2 + 3k^2) = 6(2 + 3k^2)^2 \therefore 2 + 3k^2 > 0 \therefore 4t^2 = 2 + 3k^2$$

$$\therefore 4t^2 = 2 + 3k^2 > t^2, \text{ 符合 } \Delta > 0$$

$$\therefore x_3 = \frac{6kt}{2 + 3k^2} = \frac{3k}{2t}, y_3 = \frac{-4t}{2 + 3k^2} = -\frac{1}{t} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设 $M(\frac{3k}{2t}, -\frac{1}{t})$ 到直线 $NG: kx - y + t = 0$ 的距离为 d

$$d = \frac{\left| \frac{3k^2}{2t} + \frac{1}{t} + t \right|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{\left| \frac{3k^2 + 2t^2 + 2}{2t} \right|}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{|3t|}{\sqrt{1 + k^2}} = 3\sqrt{\frac{3t^2}{4t^2 + 1}} = 3\sqrt{\frac{3}{4 + \frac{1}{t^2}}} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore 4t^2 = 2 + 3k^2 \geq 2 \therefore t^2 \geq \frac{1}{2} \therefore \frac{3\sqrt{2}}{2} \leq d < \frac{3\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

由 (i) 知, 当 NG 垂直于 x 轴时, M 到直线 NG 的距离为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

综上所述, M 到直线 NG 的距离取值范围为 $[\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$.

$$\text{故 } M \text{ 到直线 } NG \text{ 的距离的最大值为 } \frac{3\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 【解析】

(I) 设 $A(x, 0)$, 则 $B(x, \frac{\ln x}{x}), x > 1$

$$\text{则 } V = \frac{1}{3} \cdot \pi |AB|^2 \cdot |OA| = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \cdot x = \frac{\pi \ln^2 x}{3x} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{\ln^2 x}{x}, x > 1 \text{ 则 } h'(x) = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2},$$

令 $h'(x) = 0$, $x = e^2$; 令 $h'(x) > 0$, $1 < x < e^2$; 令 $h'(x) < 0$, $x > e^2$

故 $h(x)$ 在 $(1, e^2)$ 单调递增, 在 $(e^2, +\infty)$ 单调递减.

故 $h(x)_{\max} = h(e^2) = \frac{4}{e^2}$, 故 $V_{\max} = \frac{\pi}{3} h(x)_{\max} = \frac{4\pi}{3e^2}$ 4 分

(II) (i) 由 $f(x) = g(x)$ 得 $e^{ax^2} - ex + ax^2 - 1 = \ln x$, 即 $e^{ax^2} + ax^2 = ex + \ln(ex)$

令 $\varphi(x) = e^x + x$, 则 $\varphi(ax^2) = \varphi[\ln(ex)]$, 又 $\varphi'(x) = e^x + 1 > 1$, 故 $\varphi(x)$ 在 R 上单调递增,

故 $ax^2 = \ln(ex)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等实根 x_1, x_2 5 分

即 $a = \frac{\ln x + 1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等实根 x_1, x_2

令 $F(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2}$, $F'(x) = \frac{-2\ln x - 1}{x^3}$,

令 $F'(x) = 0$, $x = e^{-\frac{1}{2}}$; 令 $F'(x) > 0$, $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$; 令 $F'(x) < 0$, $x > e^{-\frac{1}{2}}$

故 $F(x)$ 在 $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ 单调递增, 在 $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ 单调递减.

故 $F(x)_{\max} = F(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{e}{2}$

又 $F(\frac{1}{e}) = 0$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\ln x + 1 \rightarrow -\infty$, $x^2 \rightarrow 0 \therefore F(x) \rightarrow -\infty$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\ln x + 1 \rightarrow +\infty$, $x^2 \rightarrow +\infty$, 与对数函数相比, 二次函数增长速度更快,

$\therefore F(x) \rightarrow 0$

故当且仅当 $0 < a < \frac{e}{2}$ 时, 直线 $y = a$ 与 $y = F(x)$ 图象有两个不同公共点,

故实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{e}{2})$ 8 分

(ii) 由 (i) 知 $\begin{cases} ax_1^2 = 1 + \ln x_1 \\ ax_2^2 = 1 + \ln x_2 \end{cases}$,

两式作差得 $ax_1^2 - ax_2^2 = \ln x_1 - \ln x_2$,

即 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{\ln x_1^2 - \ln x_2^2} = \frac{1}{2a}$, 9 分

令 $G(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$, $x > 1$, 则 $G'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0$

故 $G(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 故 $G(x) > G(1) = 0$,

即当 $x > 1$ 时, $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$, 又 $x_2 > x_1 > 0$, 故 $\ln \frac{x_2^2}{x_1^2} > \frac{2(\frac{x_2^2}{x_1^2} - 1)}{\frac{x_2^2}{x_1^2} + 1}$

故 $\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > \frac{x_1^2 - x_2^2}{\ln x_1^2 - \ln x_2^2}$ 11 分

故 $\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > \frac{1}{2a}$, 由 (i) 知 $0 < a < \frac{e}{2}$, 故 $\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > \frac{1}{e}$, 即 $x_1^2 + x_2^2 > \frac{2}{e}$ 12 分