

**2023-2024学年高考第一次联合调研抽测**

**高三数学试题**

**（分数：150分，时间：120分钟）**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. “”是“”的（ ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据充分条件、必要条件求解即可.

【详解】因为，而推不出，例如满足，但不成立，

所以“”是“”的充分不必要条件，

故选：A

2. 已知复数满足：，则的最大值为（ ）

A. 2 B. 

C.  D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数的几何意义，将问题转化为圆上一点到定点的距离，计算即可.

【详解】设，其中，则，

∵，

∴，即点的轨迹是以为圆心，为半径的圆，

∴即为圆上动点到定点的距离，

∴的最大值为.

故选：B.

3. 大多数居民在住宅区都会注意噪音问题.记为实际声压，通常我们用声压级（单位：分贝）来定义声音的强弱，声压级与声压存在近似函数关系：，其中为常数,且常数为听觉下限阈值.若在某栋居民楼内，测得甲穿硬底鞋走路的声压为穿软底鞋走路的声压的倍，且穿硬底鞋走路的声压级为分贝，恰为穿软底鞋走路的声压级的倍.若住宅区夜间声压级超过分贝即扰民，该住宅区夜间不扰民情况下的声压为，则（ ）

A. ， B. ，

C. ， D. ，

【答案】A

【解析】

【分析】由结合对数运算可求得的值，由于，可得出、，结合对数函数的单调性可出结论.

【详解】由题意，得，

则，因此，

，则，

，则.

故选：A.

4. 函数的最小正周期为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】把函数化成的形式，利用公式求函数的最小正周期.

【详解】因为.

所以，函数的最小正周期为：.

故选：B

5. 过直线上一点*P*作圆的两条切线*PA*，*PB*，若，则点*P*的横坐标为（ ）

A.  B.  C.  D. 

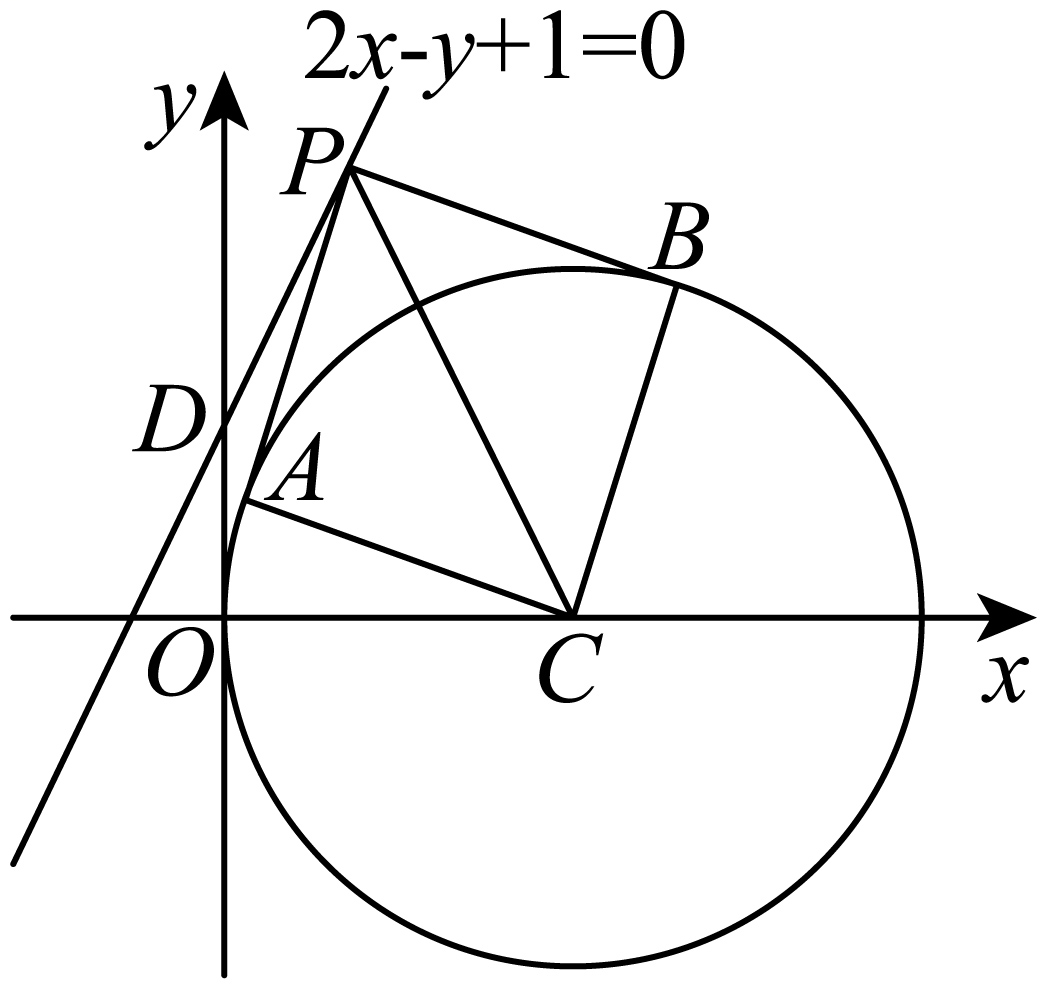
【答案】D

【解析】

【分析】令已知圆的圆心，由题设易知四边形为正方形且边长为，进而求得直线与直线夹角余弦值为，根据直线所过点并设，应用向量夹角坐标表示列方程求*P*的横坐标.

【详解】由题设，已知圆的圆心，四边形为正方形且边长为，

所以，而到直线的距离，如下图，



令直线与直线夹角为，则，

又直线过，令，则，

所以，

则.

故选：D

6. 已知函数满足：，，成立，且，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】令，求出，令，求出，令，求出，再令，可求出的关系，再利用累加法结合等差数列前项和公式即可得解.

【详解】令，则，所以，

令，则，

所以，

令，则，所以，

令，则，

所以，

则当时，，

则

，

当时，上式也成立，

所以，

所以.

故选：C.

7. 已知双曲线()的左､右焦点分别为为双曲线上的一点，为的内心，且，则的离心率为（ ）

A. 3 B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】延长到且，延长到且，结合向量的线性关系知是的重心，根据重心和内心的性质，进而得到，由双曲线定义得到齐次方程，即可求离心率.

【详解】如下图示，延长到且，延长到且，

所以，即，

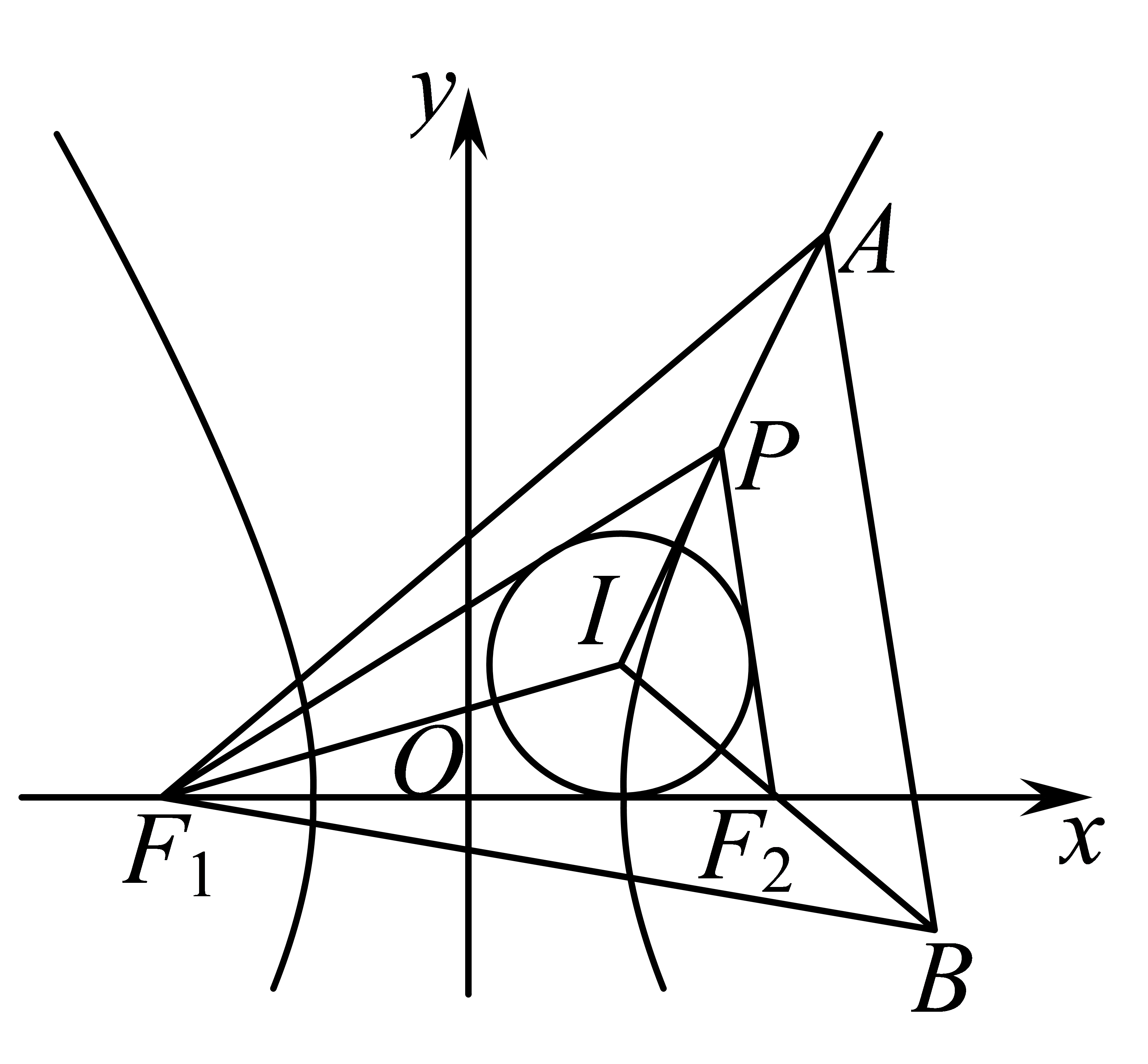
故是△的重心，即，

又，

所以，而是的内心，则，

由，则，故，即.

故选：D



【点睛】关键点睛：利用向量的线性关系构造重心，结合重心和内心的性质得到，再根据双曲线定义得到双曲线参数的齐次方程.

8. 已知点是双曲线上位于第一象限内的一点，分别为的左､右焦点，的离心率和实轴长都为2，过点的直线交轴于点，交轴于点，过作直线的垂线，垂足为，则下列说法错误的是（ ）

A. 的方程为

B. 点的坐标为

C. 的长度为1，其中为坐标原点

D. 四边形面积的最小值为

【答案】B

【解析】

【分析】对A，根据条件列式计算可得解；对B，求出直线的方程，令，求得其与轴的交点可判断；对C，求出直线的方程与直线的方程联立解得点的坐标，并求出可判断；对D，四边形的面积利用基本不等式求解判断.

【详解】对于A，因为，解得，所以其方程为，故A正确；

对于B，，所以的方程为，

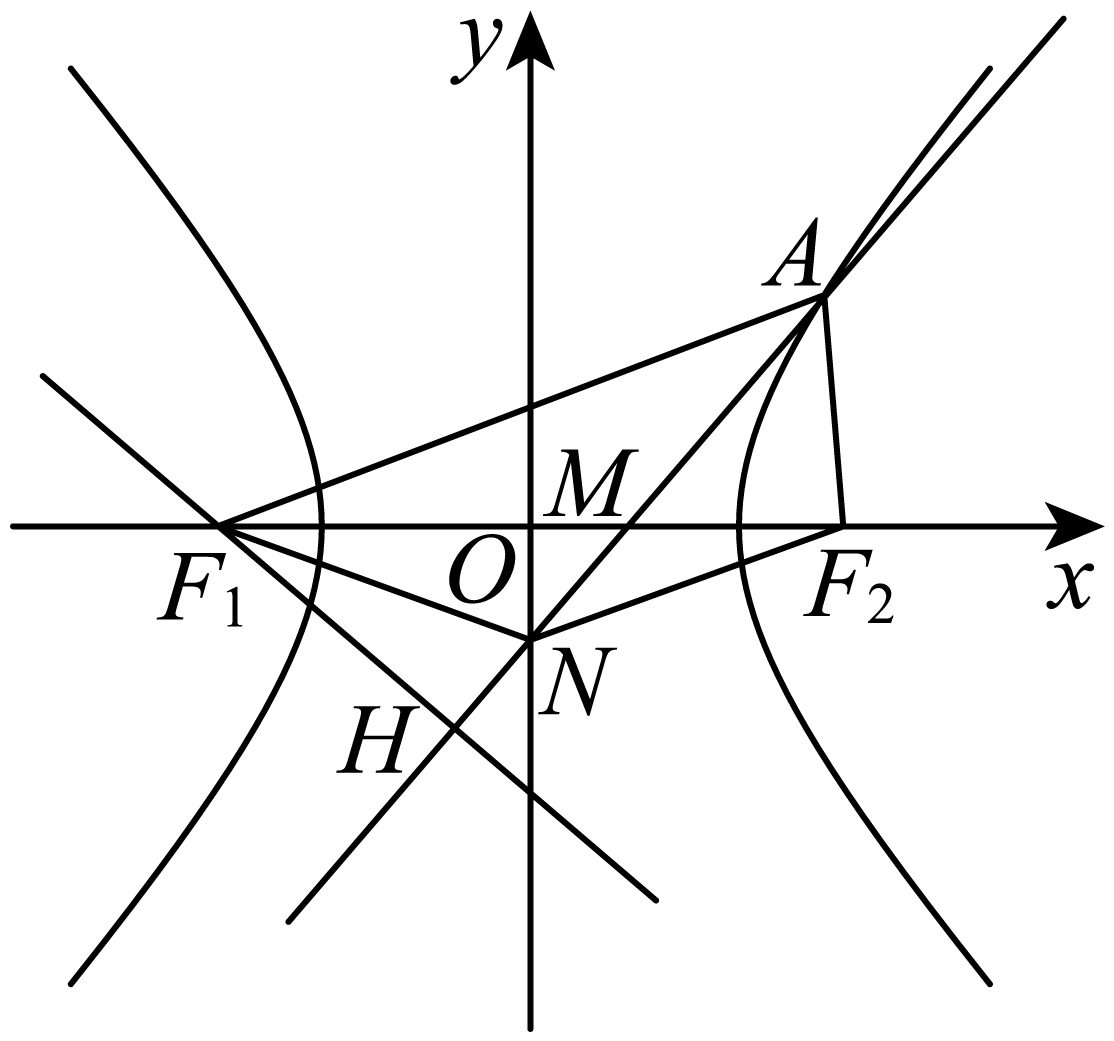
所以令得直线交轴于点，故B错误；

对于C，直线的方程为，与直线的方程联立解得，

所以，故C正确；

对于D，四边形的面积为，当且仅当时等号成立，故D正确.

故选：B.



**二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求的.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得2分.**

9. 有款小游戏，规则如下：一小球从数轴上的原点0出发，通过扔骰子决定向左或者向右移动，扔出骰子，若是奇数点向上，则向左移动一个单位，若是偶数点向上，则向右移动一个单位，则扔出次骰子后，下列结论正确的是（ ）

A. 第二次扔骰子后，小球位于原点0的概率为

B. 第三次扔骰子后，小球所在位置是个随机变量，则这个随机变量的期望是

C. 第一次扔完骰子小球位于且第五次位于1的概率

D. 第五次扔完骰子，小球位于1的概率大于小球位于3概率

【答案】AD

【解析】

【分析】计算出小球每次向左向右的概率后，结合概率公式与期望算法逐个计算即可得.

【详解】扔出骰子，奇数点向上的概率为，偶数点向上的概率亦为；

对A：若两次运动后，小球位于原点，小球在两次运动之中一定一次向左一次向右，

故其概率为，故A正确；

对B，设这个随机变量为，则的可能取值为、、、，

其中，，

故其期望

，

故B错误；

对C：第一次扔完骰子小球位于，即第一次向左移动，且第五次位于1，

则后续中小球向右3次，向左1次，故其概率为，

故C错误；

对D：第五次扔完骰子，小球位于1，即两次向左，三次向右，故其概率，

小球位于3，则四次向右，一次向左，故其概率，有，故D正确.

故选：AD.

10. 已知函数，则下列说法正确的是（ ）

A. 函数值域为

B. 函数是增函数

C. 不等式的解集为

D. 

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于A，令，利用换元法和对数函数的性质即可求得；对于B，令由复合函数的单调性进行判断即可；对于C，利用函数的奇偶性和单调性进行解不等式；对于D，由即可求解.

【详解】对于A，令，又因为在上递增，所以，由对数函数的性质可得，的值域为R，故A正确；

对于B，因为在上递增，在上递减，由复合函数的单调性可知，为减函数，故B错误；

对于C，因为的定义域为，且,

，所以为奇函数，且在上为减函数，

不等式等价于即，

等价于，解得，故C正确；

对于D，因为且，所以

，故D正确.

故选：ACD.

11. 将函数的图象上的每一点的横坐标缩短为原来的，纵坐标不变，再将所得图象向右平移个单位长度，得到的图象，则（ ）

A. 的图象关于直线对称 B. 的图象关于点对称

C. 的图象关于直线对称 D. 的图象关于点对称

【答案】BC

【解析】

【分析】利用给定变换求出函数的解析式，再逐项分析判断作答.

【详解】依题意可得，

A，当时，，则不为对称轴，A错误；

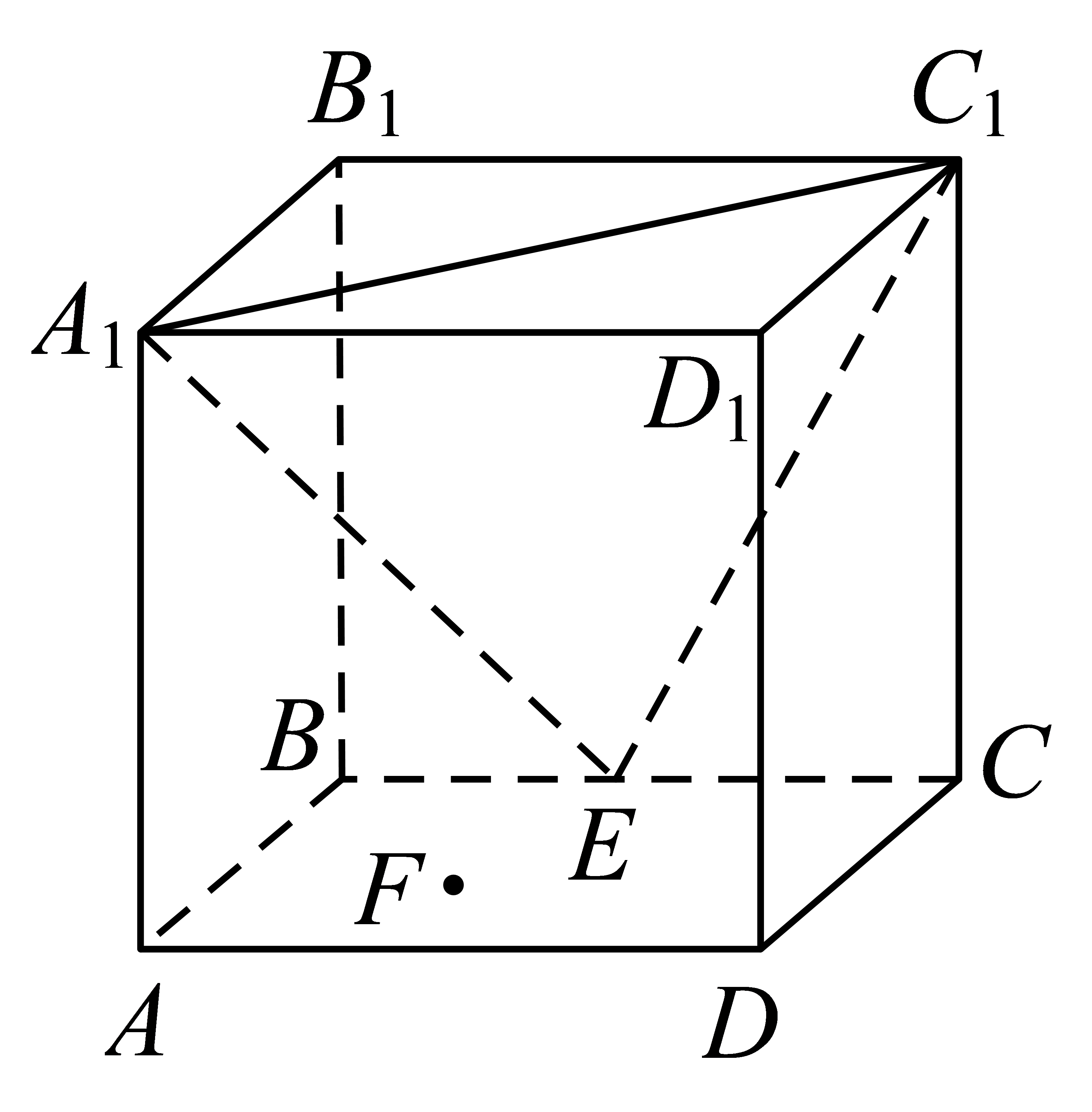
B，当时，，则为对称中心，B正确；

C，当时，，则为对称轴，C正确；

D，当时，，则不是对称中心，D错误；

故选：BC

12. 如图，在棱长为2的正方体中，为棱的中点，为底面内的一动点（含边界），则下列说法正确的是（ ）



A. 过点，，的平面截正方体所得的截面周长为

B. 存在点，使得平面

C. 若平面，则动点的轨迹长度为

D. 当三棱锥的体积最大时，三棱锥外接球的表面积为

【答案】ACD

【解析】

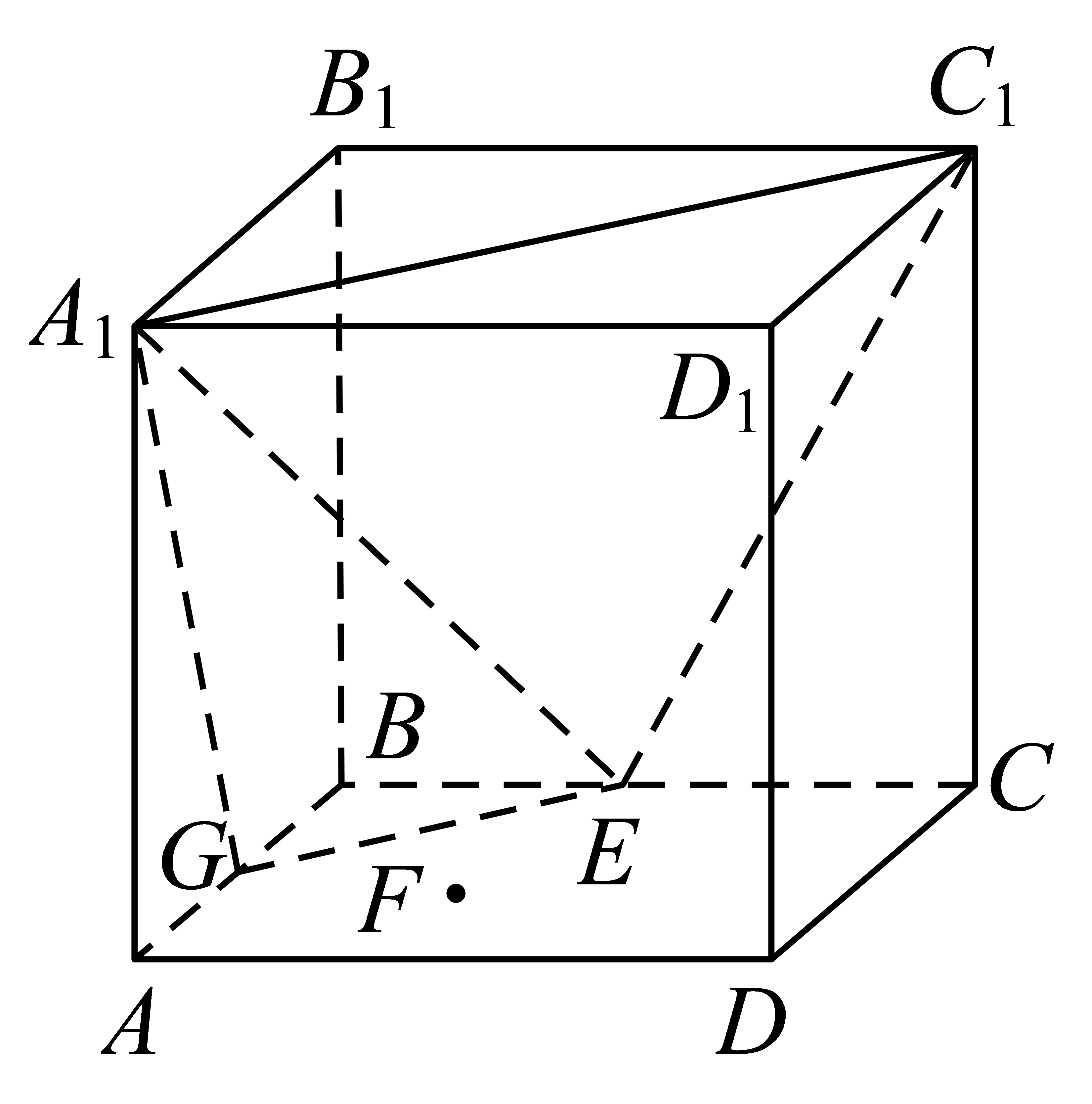
【分析】取的中点，然后证明截面为，求出周长即可判断A；假设存在点*F*，根据，分别判断点*F*位置即可得到矛盾，B错误；根据平面平面即可确定动点的轨迹，可判断C；由AC判断点*F*位置，然后建立空间直角坐标系，利用空间两点距离公式确定球心位置，然后可判断D.

【详解】A选项，如图，取的中点，连接，

因为为的中点，所以，，

所以过点，，的平面截正方体所得的截面为梯形，

其周长为，故A选项正确；



B选项，假设存在点，使得平面，

则，得只能在线段上，

再由，得只能在线段上，即与重合，不符合题意，故B选项错误；

C选项，如图，取的中点*M*，的中点，

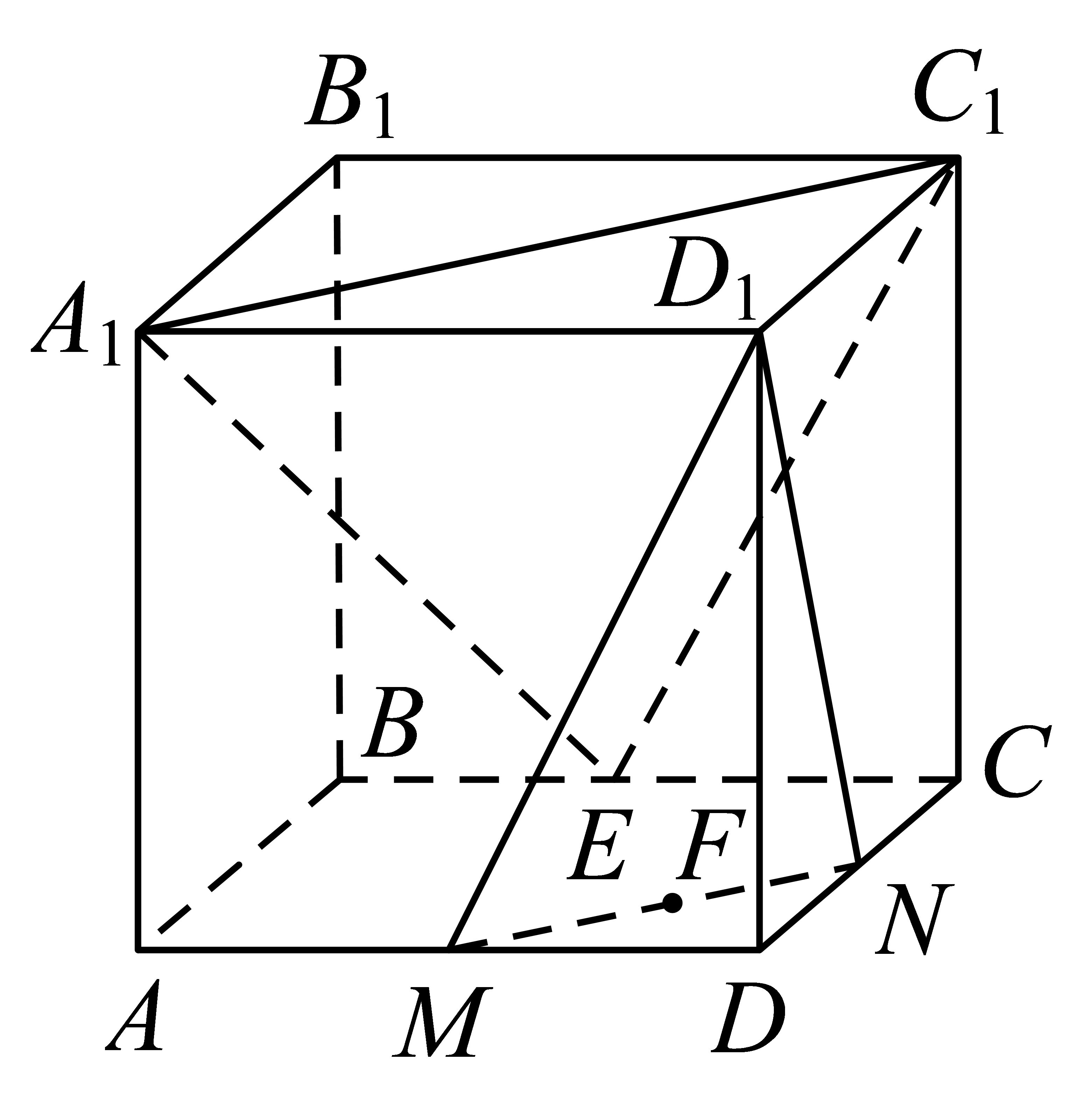
连接，，，可得，，

又平面，平面，平面，平面，

所以平面，平面，

又，所以平面平面，

所以动点的轨迹为线段，其长度为，故C选项正确；



D选项，由A，C选项可得，平面平面，

所以当在点时，到平面的距离最大，此时为等边三角形，

因为平面，所以三棱锥的外接球球心一定在直线上，

以为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，

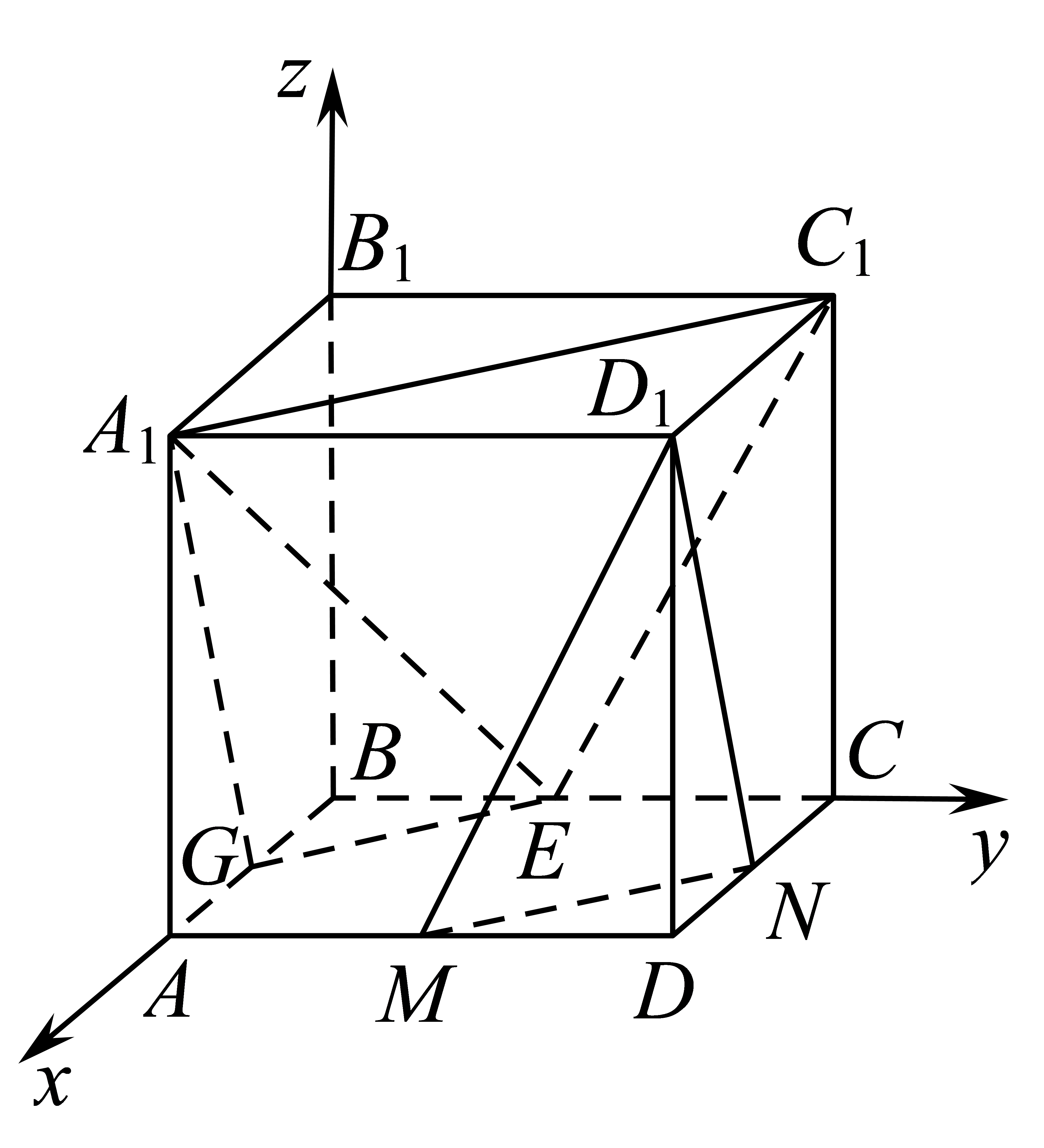
则，，设，

由得，，解得，

所以，

所以三棱锥外接球的表面积为，故D选项正确．

故选：ACD．



**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.**

13. 设非空集合满足，，则这样的的个数为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】利用非空集合子集的个数计算公式可求满足条件的的个数.

【详解】由题设可得，

这5组中的每一组中的元素必定同时出现在集合中，

故这样的非空集合的个数为，

故答案为：

14. 已知函数在区间上单调递增,那么实数*ω*的取值范围是\_\_\_\_*.*

【答案】

【解析】

【分析】化简函数的解析式，根据题中条件可得，，继而解得的值，进一步计算即可.

【详解】因为，

由且，知，

因为函数在区间上单调递增,

则,其中,

所以其中,

解得，其中,

由，

得，又，

所以或，

因为,所以当时,;

当时,，

所以实数*ω*的取值范围是*.*

故答案为：.

【点睛】关键点睛：本题关键点睛是求出右边界的范围，再根据余弦函数的单调性得到不等式组，解出的范围，再对合理赋值即可.

15. 若关于的不等式的解集为，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】先根据一元二次不等式的解集得到对称轴，然后根据端点得到两个等式和一个不等式，求出的取值范围，最后都表示成的形式即可.

【详解】因为不等式的解集为，

所以二次函数的对称轴为直线，

且需满足，即，解得，

所以，所以，

所以.

故答案为：.

【点睛】关键点睛：一元二次不等式的解决关键是转化为二次函数问题，求出对称轴和端点的值，继而用同一个变量来表示求解.

16. 已知椭圆：的离心率为，左顶点是*A*，左、右焦点分别是，，是在第一象限上的一点，直线与的另一个交点为．若，且的周长为，则直线的斜率为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】##

【解析】

【分析】由平行关系得出对应线段成比例，结合椭圆定义，表示出长度，利用余弦定理求出，得出结果.

【详解】因为椭圆：的离心率为，则，

又因为，即，

则，可得，

所以，①

又因为，可得，②

又因为，③

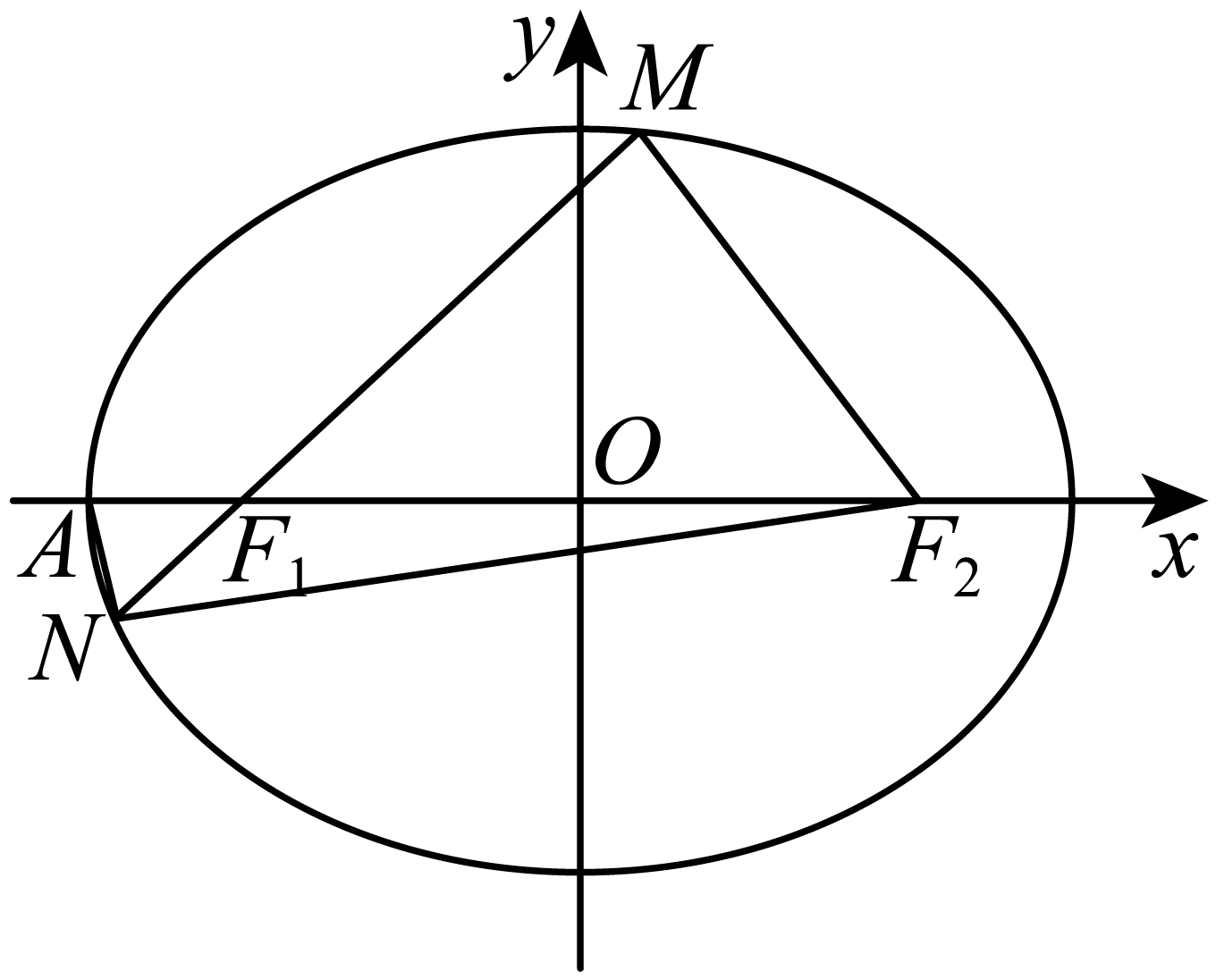
由①②③知，，

在中，由余弦定理可得，

可得为锐角，则，

所以，即的斜率为．

故答案为：.



【点睛】方法点睛：1．椭圆离心率(离心率范围)的求法

求椭圆、双曲线的离心率或离心率的范围，关键是根据已知条件确定*a*，*b*，*c*的等量关系或不等关系，然后把*b*用*a*，*c*代换，求*e*的值．

2．焦点三角形的作用

在焦点三角形中，可以将圆锥曲线的定义，三角形中边角关系，如正余弦定理、勾股定理结合起来．

**四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17. 某区域市场中智能终端产品的制造全部由甲､乙两公司提供技术支持．据市场调研及预测，商用初期，该区域市场中采用的甲公司与乙公司技术的智能终端产品各占一半，假设两家公司的技术更新周期一致，且随着技术优势的体现，每次技术更新后，上一周期采用乙公司技术的产品中有转而采用甲公司技术，采用甲公司技术的产品中有转而采用乙公司技术．设第次技术更新后，该区域市场中采用甲公司与乙公司技术的智能终端产品占比分别为和，不考虑其他因素的影响．

（1）用表示，并求使数列是等比数列的实数．

（2）经过若干次技术更新后，该区域市场采用甲公司技术的智能终端产品的占比能否达到以上？若能，则至少需要经过几次技术更新；若不能，请说明理由．

【答案】（1）；；

（2）经过若干次技术更新后，该区域市场采用甲公司技术的智能终端产品的占比不会达到以上，理由见解析．

【解析】

【分析】（1）根据条件得到数列的递推关系，利用数列是等比数列，求的值；

（2）首先由（1）得数列的通项公式，再求出的范围判断不等式是否有解.

【小问1详解】

由题意知，经过次技术更新后，，

则，

即．

设，则，

令，解得．

又，

所以当时，是以为首项，为公比的等比数列．

【小问2详解】

由（1）可知，则，．

所以经过次技术更新后，该区域市场采用甲公司技术的智能终端产品的占比为．

对于任意，所以，

即经过若干次技术更新后，该区域市场采用甲公司技术的智能终端产品的占比不会达到以上．

【点睛】关键点睛：本题的关键是得到数列的递推关系，根据题意有代入消去得到递推关系.

18. 在锐角中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，已知.

（1）求角*C*；

（2）求的取值范围.

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）利用余弦定理和正弦定理化边为角化简即得三角方程，解之即得；

（2）先用三角降幂公式降次，再通过（1）求得的进行消元，化简得到余弦型函数，再利用锐角三角形条件，求得角的范围，最后利用余弦型函数的值域即得.

【小问1详解】

因为，

由余弦定理，，

整理得： ，

又由正弦定理，，而*A*为三角形内角，故，

故，而*C*锐角三角形内角，故

【小问2详解】

由（1）知，



，

因为三角形为锐角三角形，故，解得：，

则，故，所以.

故的取值范围是.

19. 品酒师需要定期接受品酒鉴别能力测试，测试方法如下：拿出*n*瓶外观相同但品质不同的酒让其品尝，要求按品质优劣为它们排序，经过一段时间，等他等记忆淡忘之后，再让他品尝这*n*瓶酒，并重新按品质优劣为它们排序，这称为一轮测试.设在第一次排序时被排为1，2，3，…，*n*的*n*种酒，在第二次排序时的序号为，并令，称*X*是两次排序的偏离度.评委根据一轮测试中的两次排序的偏离度的高低为其评分.

（1）当时，若等可能地为1，2，3的各种排列，求*X*的分布列；

（2）当时，

①若等可能地为1，2，3，4的各种排列，计算的概率；

②假设某品酒师在连续三轮测试中，都有（各轮测试相互独立），你认为该品酒师的鉴别能力如何，请说明理由.

【答案】（1）答案见解析

（2）①；②答案见解析

【解析】

【分析】（1）计算每种排序的值以及对应概率，由此可得的分布列；

（2）①先计算出的值，然后可求；②先分析续三轮测试中，都有的概率，然后根据概率值的大小进行分析即可.

【小问1详解】

的排序共有种，且每种排序等可能，

此时可取，

又时，的排序为， ，

时，的排序为或，，

时，的排序为或或，，

所以的分布列为：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

【小问2详解】①排序共有种，且每种排序等可能，

而，故中有偶数个奇数，故必为偶数，

当时， 的排序与第一次排序无变化时，

此时仅有种排序：，则，

当时， 的排序与第一次排序相比仅有相邻两个位置变化时，

此时有种排序：、、，，

所以；

②因为各轮测试相互独立，

所以“连续三轮测试中，都有”的概率为，

所以是一个小概率，这表明仅凭随机猜测得到三轮测试都有的结果的可能性很小，

所以我们认为该品酒师有良好的鉴别能力，不是靠随机猜测.

【点睛】关键点点睛：本题考查离散型随机变量与概率的综合运用，着重考查学生理解问题与分析问题的能力，难度较大.解答第三问的关键在于，能通过独立事件的概率计算公式求解出目标事件的概率并能对概率值的大小进行分析，一般认为小于的概率为小概率.

20. 设为实数，直线和圆相交于，两点*.*

（1）若，求的值；

（2）若点在以为直径的圆外（其中为坐标原点），求实数的取值范围*.*

【答案】（1）或

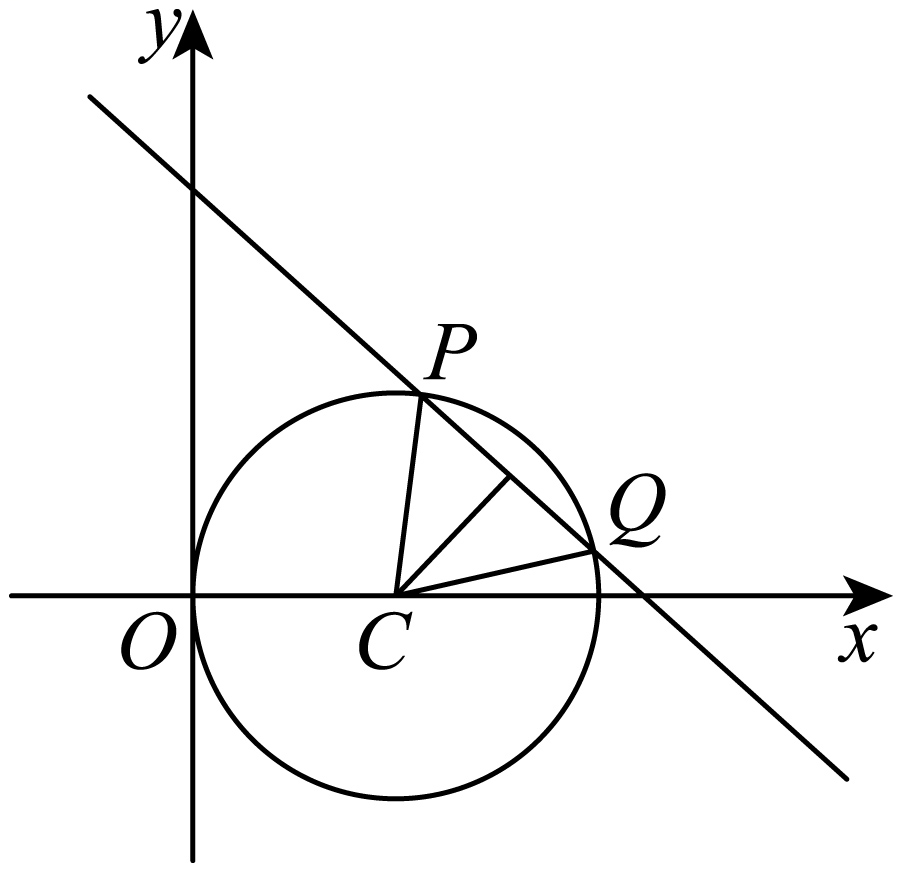
（2）

【解析】

【分析】（1）将圆的方程转化为标准方程，可得圆心与半径，再根据垂径定理可得圆心到直线的距离，进而可得的值；

（2）根据点在以为直径的圆外，可知，联立直线与圆的方程，结合韦达定理可得参数的取值范围.

【小问1详解】



将圆的方程化为标准方程，

圆心，半径，

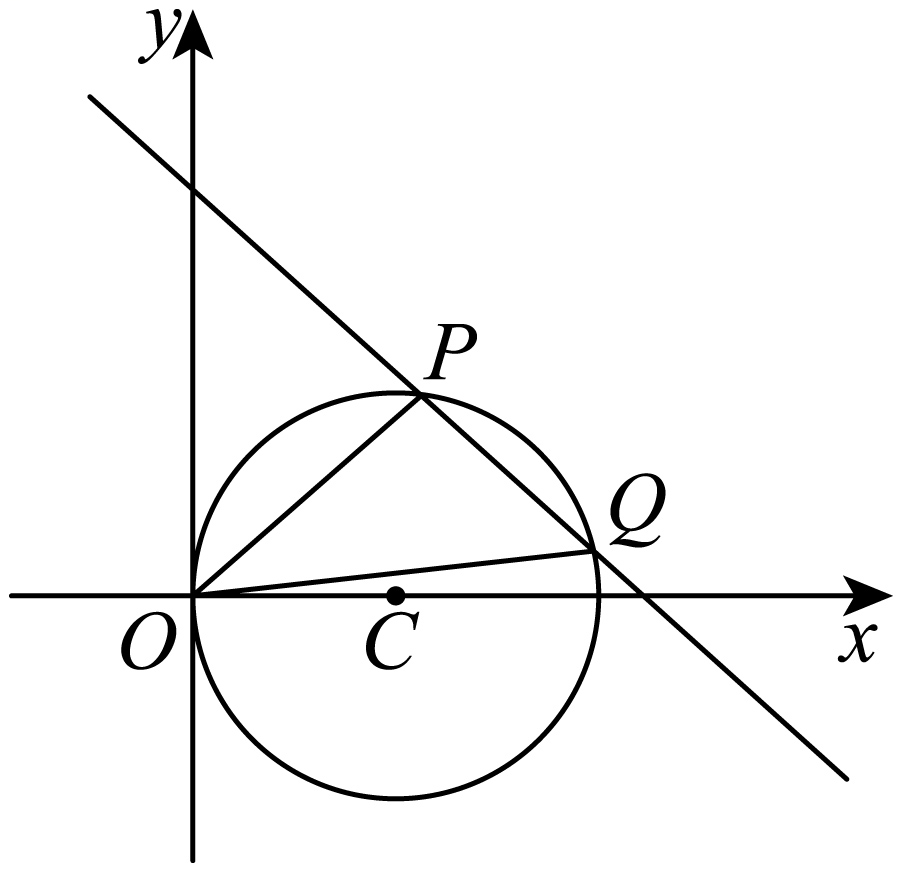
由，

可知圆心到直线得距离为，

所以，

解得或；

【小问2详解】



设，，

联立，得，

由，得，

且，，

因为点在以为直径的圆外，所以，

即，

即 ，

解得，所以的取值范围是.

21. 正多面体又称为柏拉图立体，是指一个多面体的所有面都是全等的正三角形或正多边形，每个顶点聚集的棱的条数都相等，这样的多面体就叫做正多面体.可以验证一共只有五种多面体.令（均为正整数），我们发现有时候某正多面体的所有顶点都可以和另一个正多面体的一些顶点重合，例如正面体的所有顶点可以与正面体的某些顶点重合，正面体的所有顶点可以与正面体的所有顶点重合，等等.

（1）当正面体的所有顶点可以与正面体的某些顶点重合时，求正面体的棱与正面体的面所成线面角的最大值；

（2）当正面体在棱长为的正面体内，且正面体的所有顶点均为正面体各面的中心时，求正面体某一面所在平面截正面体所得截面面积；

（3）已知正面体的每个面均为正五边形，正面体的每个面均为正三角形.考生可在以下2问中选做1问.

（第一问答对得2分，第二问满分8分，两题均作答，以第一问结果给分）

第一问：求棱长为的正面体的表面积；

第二问：求棱长为的正面体的体积.

【答案】（1）

（2）

（3）第一问：；第二问：

【解析】

【分析】（1）根据正面体特点得出、、、、即可求出夹角最大值；

（2）得出显然截面为边长为的正三角形即可求解；

（3）第一问：根据正二十面体各面为正三角形即可求解；

第二问：图形可以分为得到一个棱长相等的平行六面体和六个相同的立体图形，由此即可求解.

小问1详解】

设正面体每个端点出去的棱数相等为，

每个面的边的数量相等为，端点数量为，

面的数量为，棱的数量为，

由于每个棱用两个端点，所以有：，

由于每两个相邻的面共用一条棱，所以有：，

由，解得，

因为代表多边形的边数，所以，

因为要得到立体图形，必须有，

由题意易得，所以，，

所以满足条件的只有组解，

①，，，即正四面体；

②，，，即正六面体；

③，，，即正十二面体；

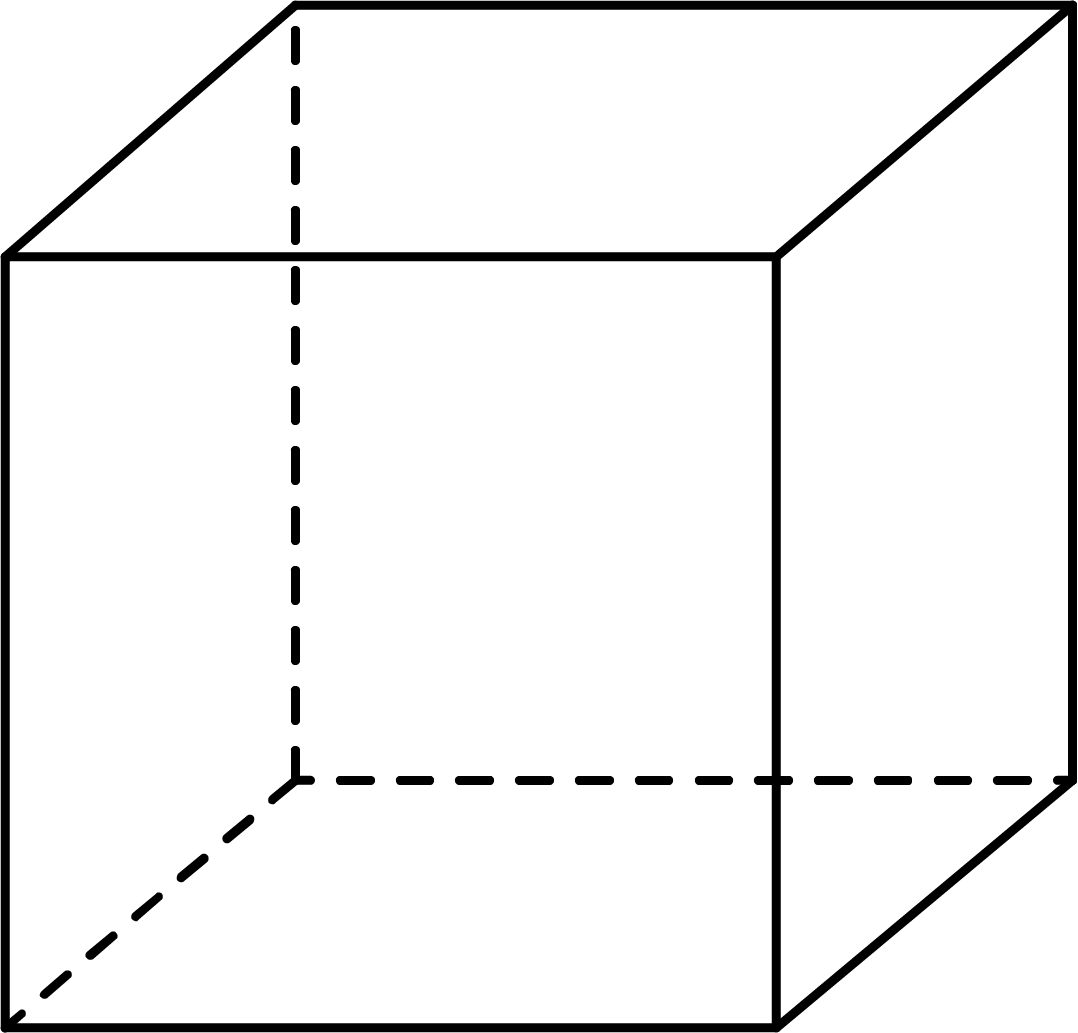
④，，，即正八面体；

⑤，，，即正二十面体。

即，，，，，

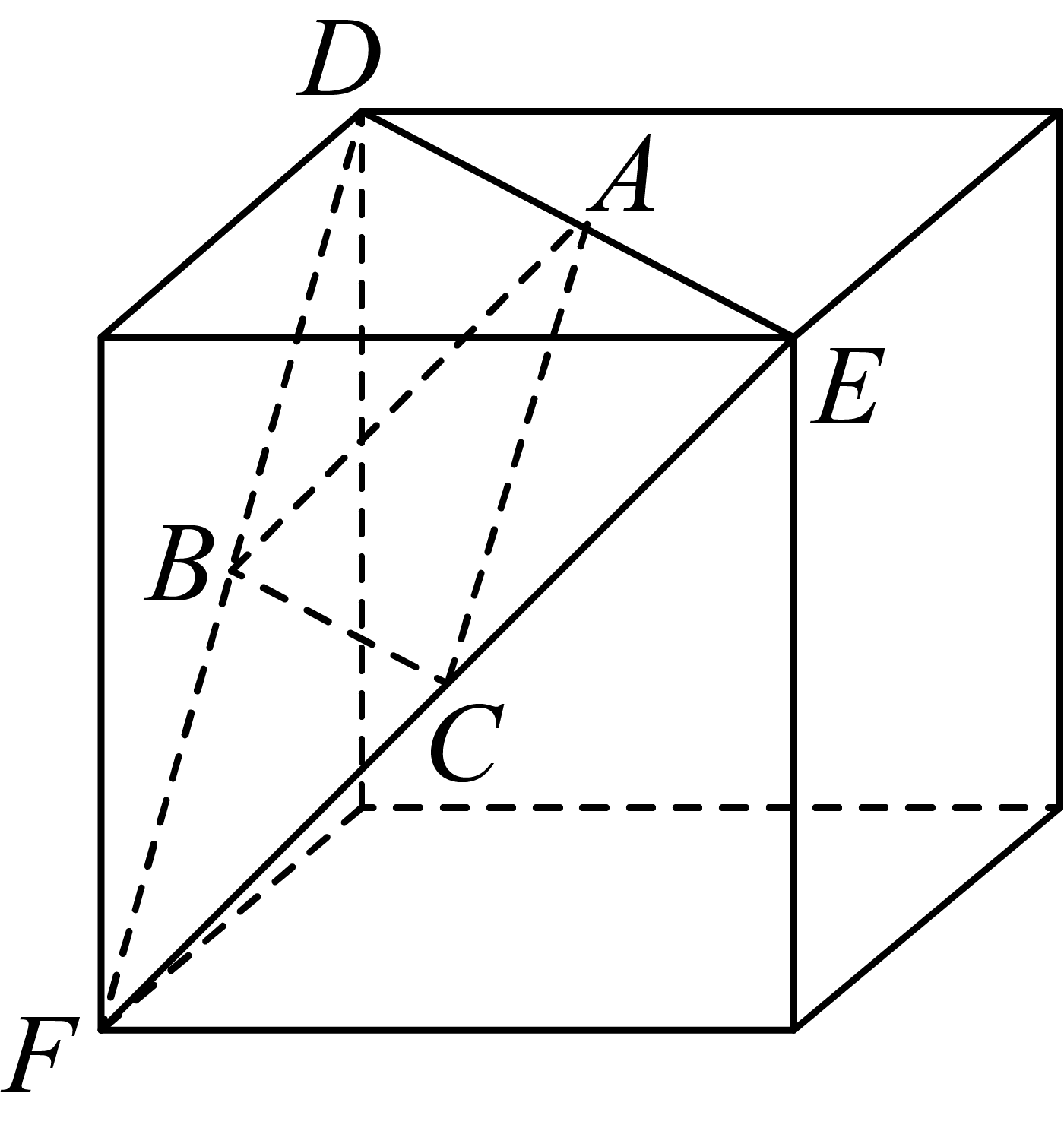
为了满足题意，只需找到正六面体的四个端点，端点距离全部相等，

满足题意的仅有一种，如图所示：



易得线面角只有或，所以夹角最大值为；

【小问2详解】



、、代表正六面体的中心，、、代表截面三角形，

显然截面为边长为的正三角形，面积；

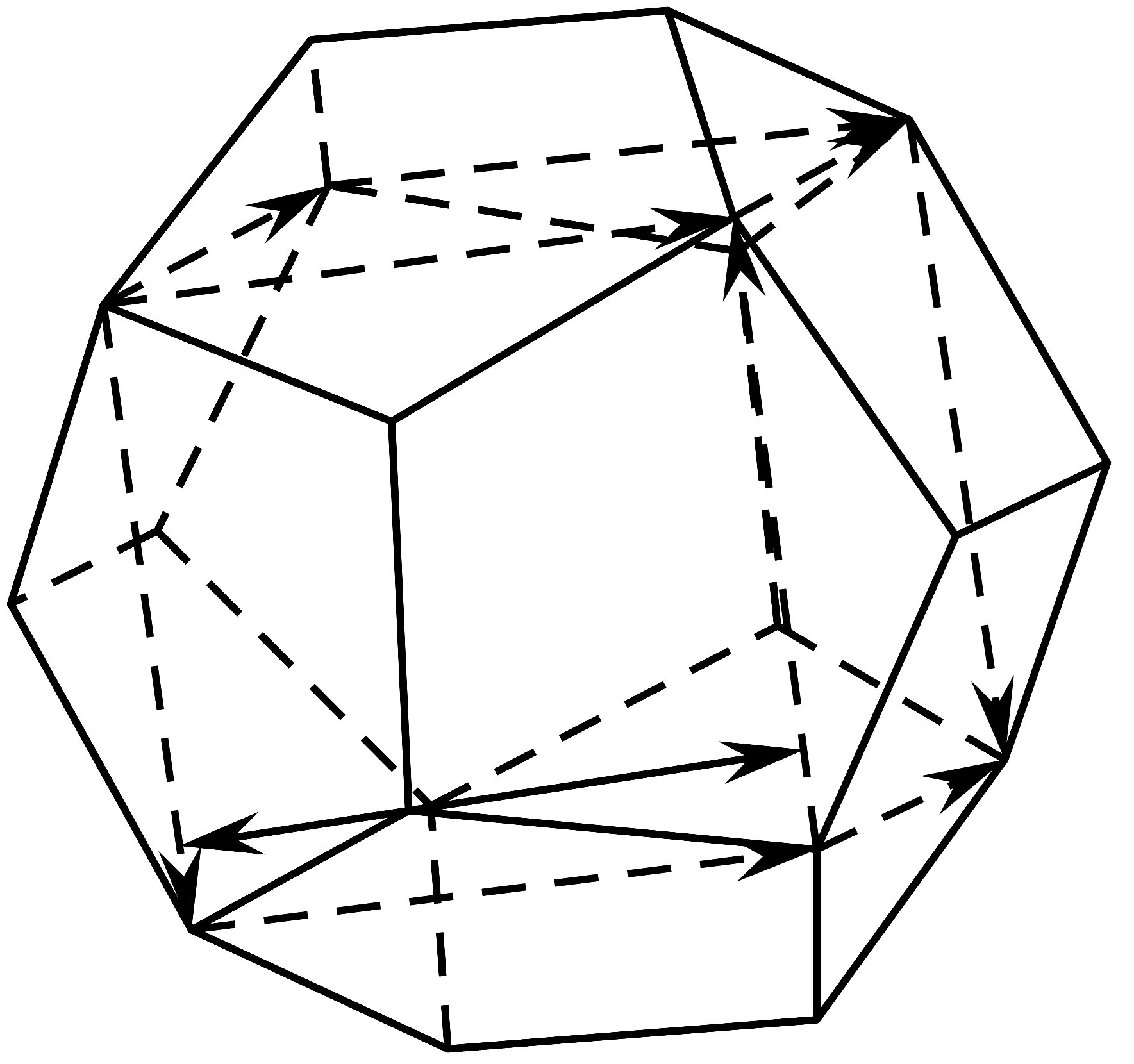
【小问3详解】

第一问：

正二十面体各面为正三角形，表面积；

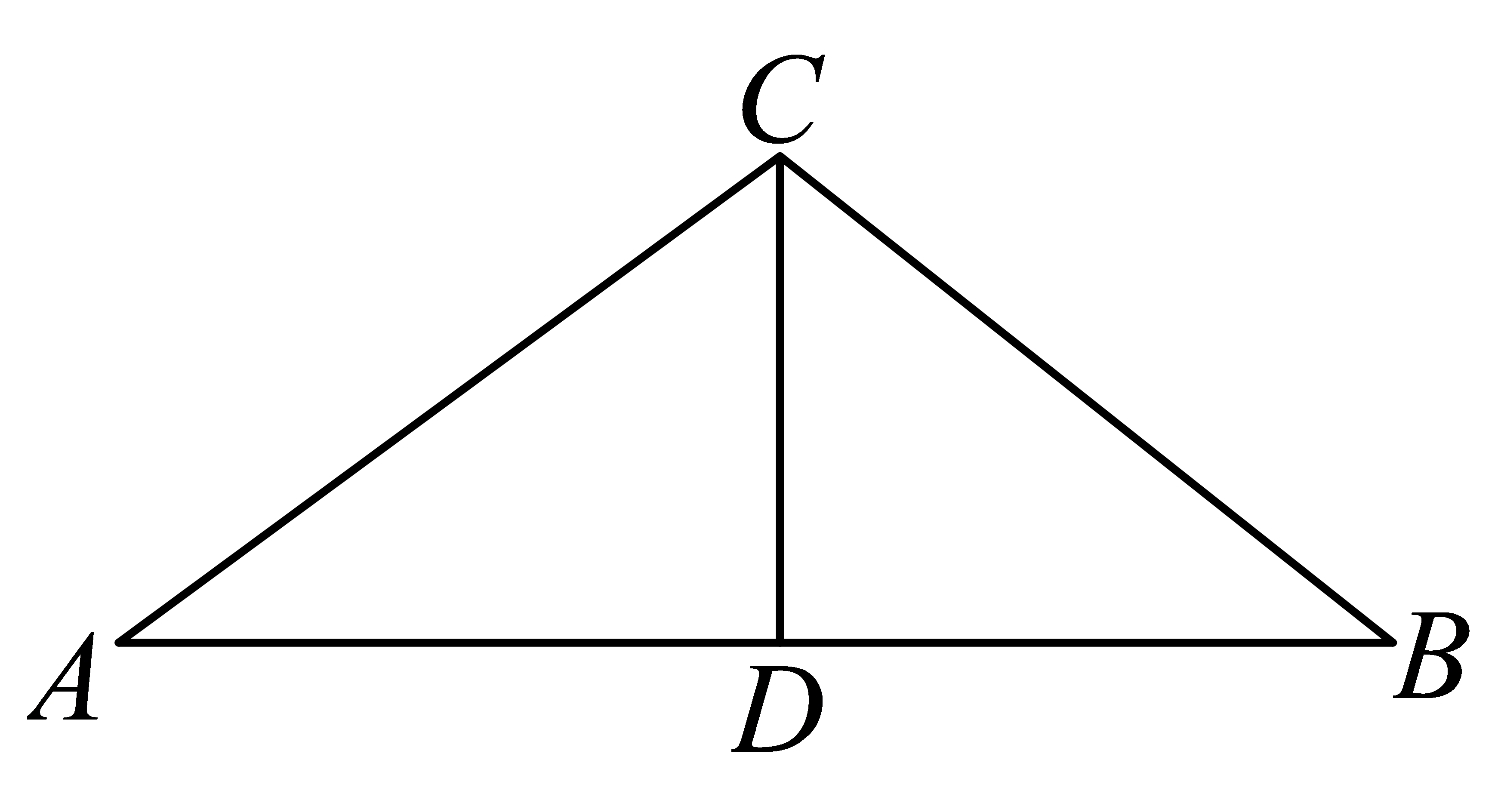
第二问：正十二面体各面为正五边形，图形如下：

按照图示带箭头的虚线分割，得到一个棱长相等的平行六面体和六个相同的立体图形，



如图、长度为1，且，

由易知，即正六面体边长为，



正六面体边长为，则，

沿着顶棱的两个端点，分别作关于顶棱垂直的切面，立体图形可以拆成两个四面体，一个三棱柱，

先算出绿色边的长度，再用勾股定理易得立体图形高为，

，

所以总体积为.

【点睛】关键点点睛：本题关键在于熟悉正面体的性质以及对立体图形想象的正确.

22. 一类项目若投资1元，投资成功的概率为．如果投资成功，会获得元的回报；如果投资失败，则会亏掉1元本金．为了规避风险，分多次投资该类项目，设每次投资金额为剩余本金的，1956年约翰·拉里·凯利计算得出，多次投资的平均回报率函数为，并提出了凯利公式．

（1）证明：当时，使得平均回报率最高的投资比例满足凯利公式；

（2）若，，求函数在上的零点个数．

【答案】（1）证明见解析

（2）有且仅有两个零点

【解析】

【分析】（1）证法一：直接求导，令，得到，结合得到函数单调性，求出在取得最大值；

证法二：先对函数取对数，等价于的最值问题（方便求导），求导得到函数单调性，求出答案；

（2）得到，二次求导，结合零点存在性定理得到函数单调性，得到在上至多两个零点，再根据特殊点的函数值和零点存在性定理得到至少有两个零点，从而得到有且仅有两个零点．

小问1详解】

证法一：因为，，

则，

即，

显然，令，故，

解得．

因为，所以，

故在上单调递增，在上单调递减，

故在取得最大值．

证法二：由于，，，故，，．

要使得最大，等价于使得最大，

则，令，得．

因为，所以，

故在上单调递增，在上单调递减，

故在取得最大值，即在取得最大值．

【小问2详解】

因为，，，则，所以，

则，

故，则，

令，则．

当时，，故在上单调递增．

因为，，

故，使得，同时使得当时，；

当时，，

故在上单调递减，在上单调递增，故在上至多两个零点．①

又因为，，，

注意到，故，则，

故．

由于，故在上至少有一个零点．②

由于，，，

故，

由于，故在上至少有一个零点．③

综合②③，故在上至少有两个零点．④

综合①④，则在上有且仅有两个零点