**2023——2024学年高二下学期第一次学情检测**

**数学试题**

**考生注意：**

**1.本试卷分选择题和非选择题两部分.满分150分，考试时间120分钟.**

**2.答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚.**

**3.考生作答时，请将答案答在答题卡上.选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效.**

**第Ⅰ卷（选择题共58分）**

**一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的. ）**

1. 在复平面内，复数 对应的点位于 （ ）

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知样本数据 均值为3，则样本数据 的均值为 （ ）

A.  B. 6 C. 7 D. 12

3. 已知等差数列的公差为2，若成等比数列，则 的值为 （ ）

A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

4. 已知幂函数 为偶函数，则  （ ）

A. 1 B.  C. 3 D. 

5. 直线与抛物线交于 两点，则 （ ）

A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

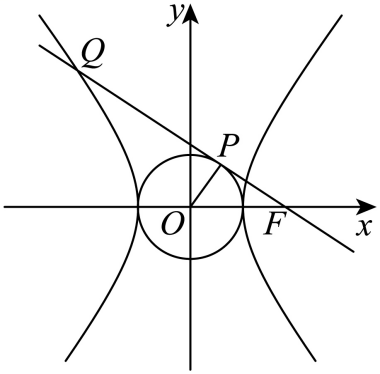
6. 已知且 ，若函数在上单调递增，则实数 的取值范围为（ ）

A.  B.  C.  D. 

7. 在空间直角坐标系中，已知 ，则点 到直线 的距离是（ ）

A.  B.  C.  D. 

8. 如图，过双曲线右焦点引圆的切线，切点为，延长交双曲线的左支于点. 若，则双曲线的离心率为（ ）



A  B.  C.  D. 

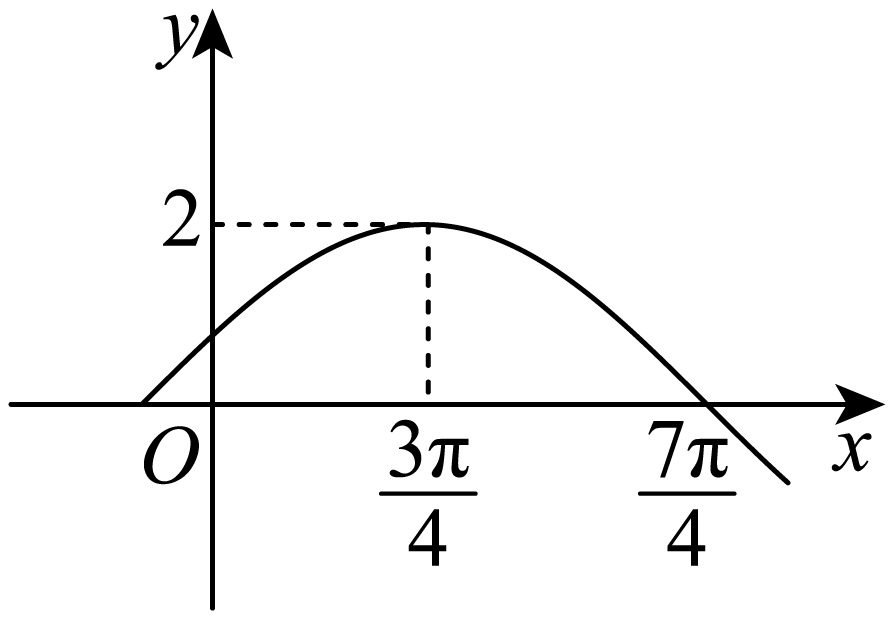
**二、选择题（本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分）**

9. 点在圆上，点在圆上，则（ ）

A. 圆与圆有4条公切线 B. 的最大值为

C. 的最小值为 D. 最大值为

10. 已知函数，其部分图象如图所示，则下列关于 结论正确的是（ ）



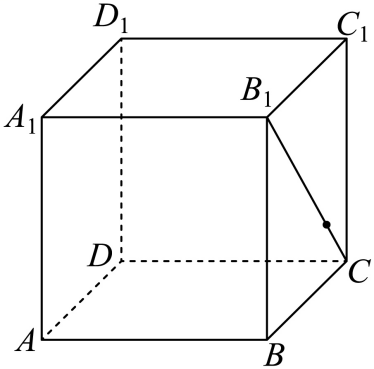
A. 

B. 在区间上单调递减

C. 的图象关于点 对称

D. 的图象向右平移个单位长度可以得到函数 图象

11. 如图，在棱长为2的正方体中，点是线段上的动点. 则 （ ）



A. 与平面相交于点 B. 

C. 直线与直线所成角的范围是 D. 三棱锥的体积为定值是

**第Ⅱ卷（非选择题共92分）**

**三、填空题（本题共3小题，每小题5分，共15分. ）**

12. 假设 ，且与 相互独立，则 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

13. 已知椭圆短轴长为4，焦距为，分别是椭圆的左、右焦点，若点为 上的任意一点，的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

14. 2024央视春晚魔术表演的背景是约瑟夫问题，这是一个经典的数学问题，用数学语言可描述为：将数字 顺时针排列在圆周上，首先取走数字2，然后按照顺时针方向，每隔一个数字就取走一个数字，……直到圆周上只剩下一个数字，将这个数字记为 . 例如 时，操作可知 ，则 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**四、解答题（本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. ）**

15. 已知集合 .

（1）若 ，求 ;

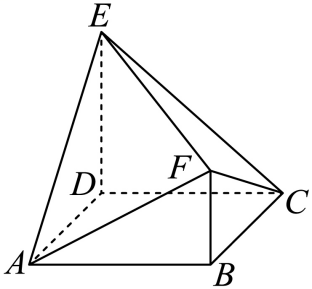
（2）若“ ”是“ ”充分不必要条件，求实数 取值范围.

16. 已知数列 的前 项和为 ，若 ，且 .

（1）求数列 的通项公式；

（2）若 ，求数列 的前 项和 .

17. 如图，在几何体中，底面为边长为2的正方形，平面.



（1）证明：平面 ；

（2）求二面角的大小.

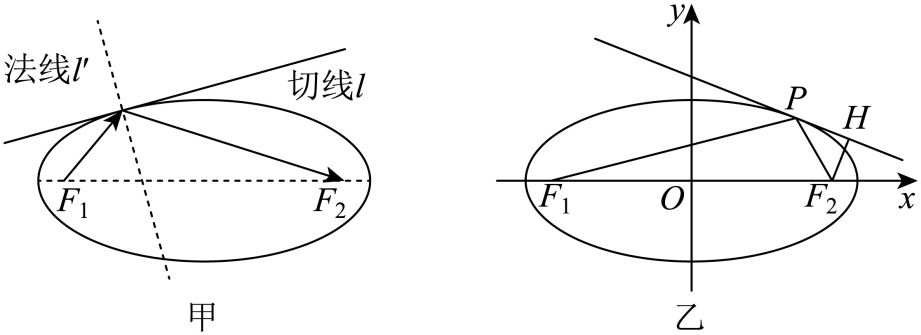
18. 已知圆 ，过定点 作与 轴不重合的直线 交曲线 于 两点.

（1）过点作与直线 垂直的直线 交曲线 于、两点，求四边形 面积的最大值；

（2）设曲线 与 轴交于 两点，直线 与直线 相交于点 ，试讨论点 是否在定直线上，若是，求出该直线方程；若不是，说明理由.

19. 历史上第一个研究圆锥曲线的是梅纳库莫斯（公元前375年——325年），大约100年后，阿波罗尼斯更详尽、系统地研究了圆锥曲线，并且他还进一步研究了这些圆锥曲线的光学性质：如图甲，从椭圆的一个焦点出发的光线或声波，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点，其中法线表示与椭圆的切线垂直且过相应切点的直线.

已知图乙中，椭圆 的中心在坐标原点，焦点为，由 发出的光线经椭圆两次反射后回到 经过的路程为 .



（1）点 是椭圆 上除顶点外的任意一点，椭圆 在点 处的切线为在 上的射影 满足，利用椭圆的光学性质求椭圆 的方程；

（2）在: （1）的条件下，设椭圆 上顶点为 ，点 为 轴上不同于椭圆顶点的点，且，直线 分别与椭圆 交于点 （异于点 ），，垂足为 ，求 的最小值.

**2023——2024学年高二下学期第一次学情检测**

**数学试题**

**考生注意：**

**1.本试卷分选择题和非选择题两部分.满分150分，考试时间120分钟.**

**2.答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚.**

**3.考生作答时，请将答案答在答题卡上.选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效.**

**第Ⅰ卷（选择题共58分）**

**一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的. ）**

1. 在复平面内，复数 对应点位于 （ ）

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数的乘法求出复数，再确定复数对应的点所在的象限.

【详解】因为，故对应点在第二象限.

故选：B

2. 已知样本数据 的均值为3，则样本数据 的均值为 （ ）

A.  B. 6 C. 7 D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】由平均数的计算公式求解即可.

【详解】因为样本数据 的均值为，

所求样本数据的均值为.

故选：C.

3. 已知等差数列的公差为2，若成等比数列，则 的值为 （ ）

A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

【答案】A

【解析】

【分析】由题意可得，再根据等差数列的通项计算即可.

【详解】∵成等比数列，

∴，则，可得.

故选：A.

4. 已知幂函数 为偶函数，则  （ ）

A. 1 B.  C. 3 D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据幂函数的概念和偶函数的性质求参数的值.

【详解】因为为幂函数，

所以得 或 ，

又因为 是偶函数，所以 .

故选：D

5. 直线与抛物线交于 两点，则 （ ）

A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

【答案】B

【解析】

【分析】联立直线与抛物线的方程，由韦达定理可得，又因为抛物线 的焦点在直线上，由抛物线的焦半径公式求解即可.

【详解】联立，消去可得，

设，，

所以，

又因为抛物线 的焦点在直线上，

.

故选：B.

6. 已知且 ，若函数在上单调递增，则实数 的取值范围为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】若满足条件，则每一段上都为增函数，且在分界点处的函数值前一段的函数值不大于后一段的函数值，求解即可.

【详解】函数在上单调递增，

，，

实数的取值范围为，

故选：D.

7. 在空间直角坐标系中，已知 ，则点 到直线 的距离是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

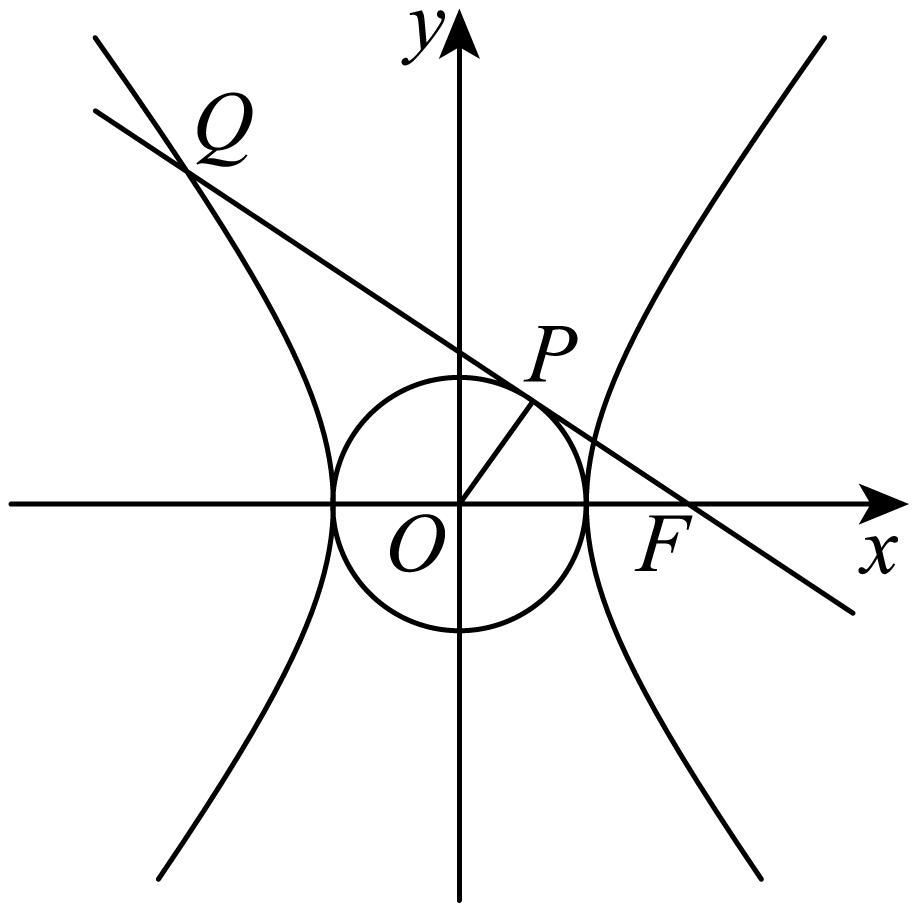
【分析】利用空间向量法求出点到直线距离即可.

【详解】，，

.

故选：A.

8. 如图，过双曲线的右焦点引圆的切线，切点为，延长交双曲线的左支于点. 若，则双曲线的离心率为（ ）



A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意求出的长，再利用双曲线定义和余弦定理求解即可.

【详解】取双曲线左焦点为，连接，

由与圆相切于点得，，

令双曲线的焦距为，则，

由得，

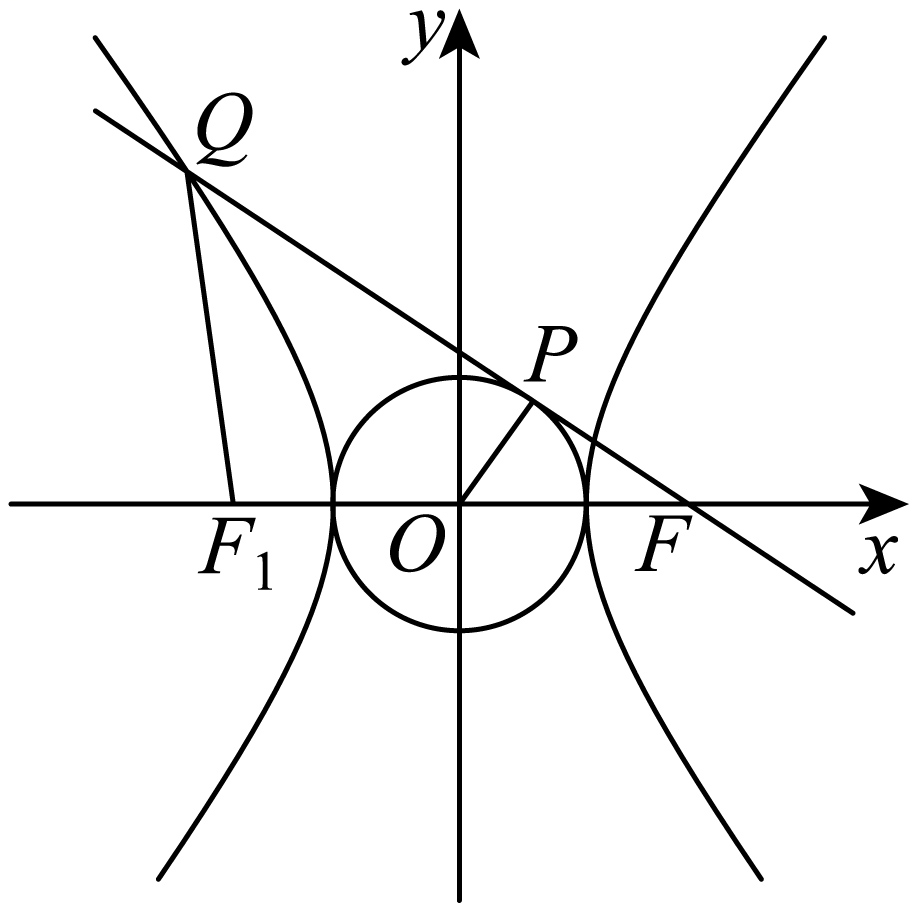
由双曲线的定义得，，

在中，；

在中，由余弦定理得，整理得，即，所以，

所以双曲线的离心率为.

故选：B.



【点睛】方法点睛：求解双曲线的离心率的方法如下:

(1)定义法：通过已知条件列出方程组，求得的值，根据离心率的定义求解离心率的值；

(2)齐次式法：由已知条件得出关于的齐次方程，然后转化为关于的方程求解；

(3)特殊值法：通过取特殊位置或特殊值，求得离心率.

**二、选择题（本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分）**

9. 点在圆上，点在圆上，则（ ）

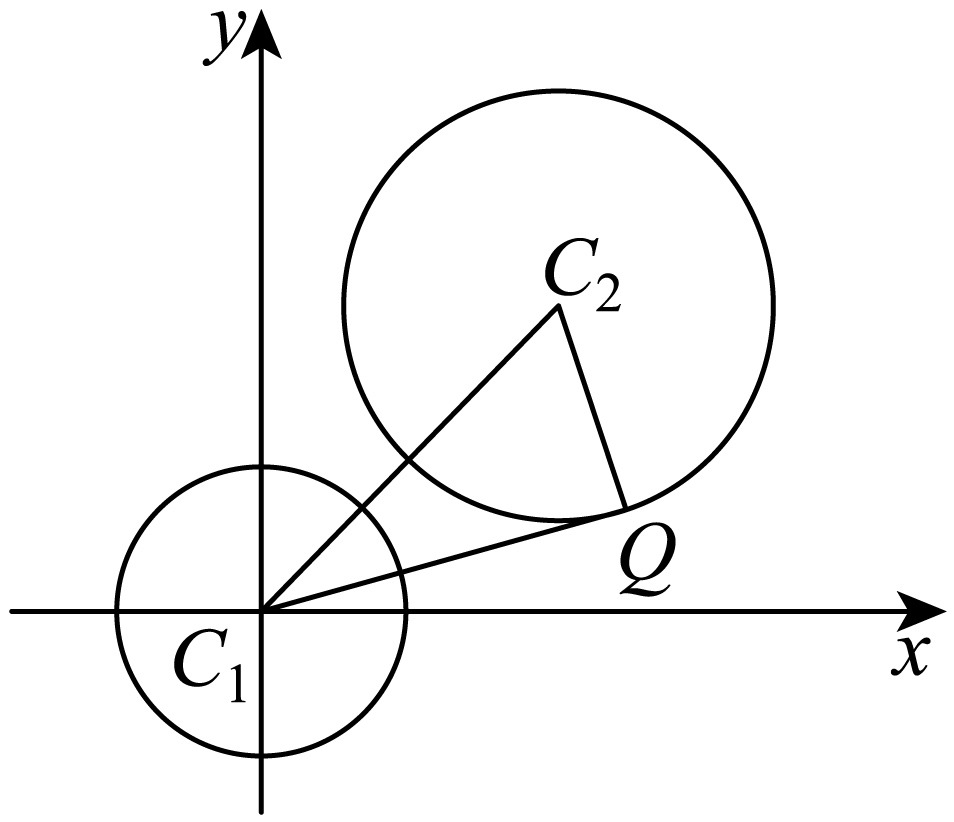
A. 圆与圆有4条公切线 B. 的最大值为

C. 的最小值为 D. 最大值为

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据题意，由两圆的位置关系即可判断ABC，当与圆相切时最大，即可判断D

【详解】

因为圆心，半径，

圆，即圆心，半径，

则，所以两圆外离，所以两圆有四条公切线，正确；

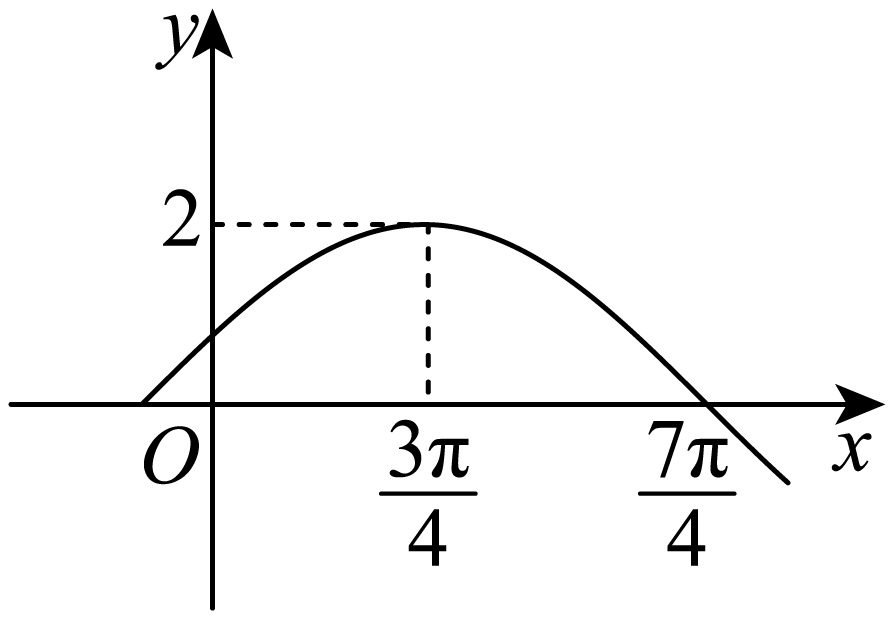
，，故错误，C正确：

当与圆相切时最大，且，，

则，所以最大值为，故正确.

故选：ACD

10. 已知函数，其部分图象如图所示，则下列关于 的结论正确的是（ ）



A. 

B. 在区间上单调递减

C. 的图象关于点 对称

D. 的图象向右平移个单位长度可以得到函数 图象

【答案】AC

【解析】

【分析】根据已知条件求得的解析式，再结合三角函数的单调性、对称性、三角函数图象变换等知识确定结论错误的选项.

【详解】由图可知，， ，

将点 代入，

由于，所以，

所以，故 A正确：

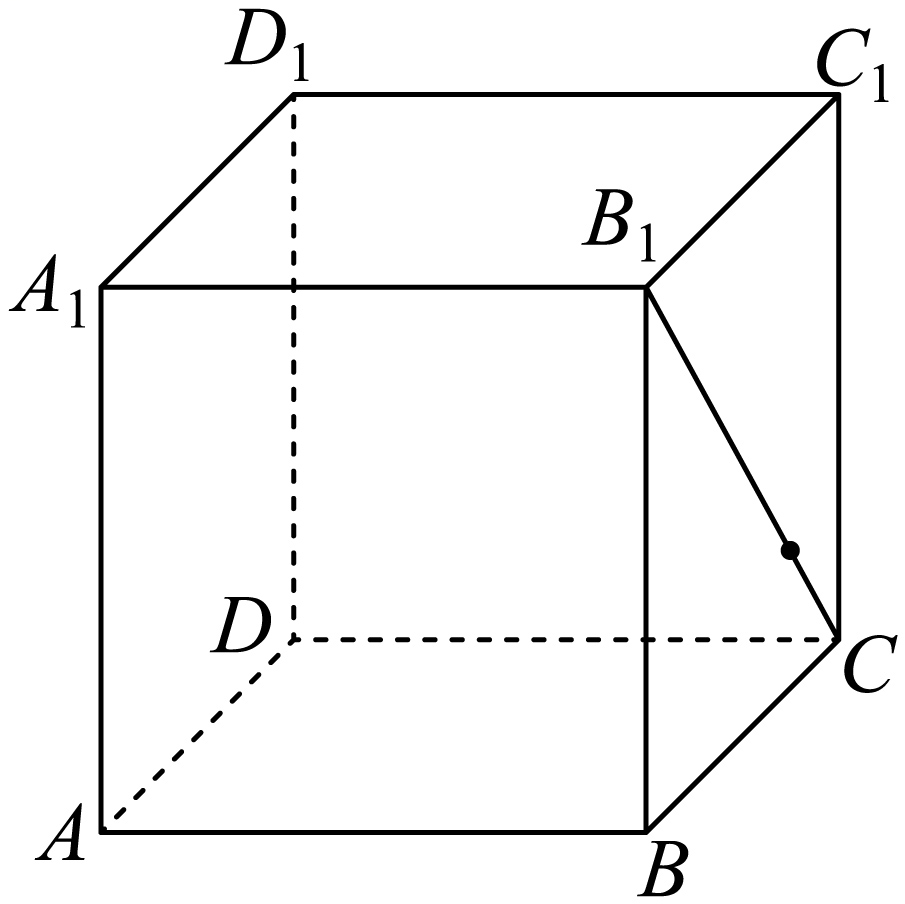
，所以在区间上不单调，故B错误：

得的图象关于点对称，故C正确：

，故D错误.

故选：AC.

11. 如图，在棱长为2的正方体中，点是线段上的动点. 则 （ ）



A. 与平面相交于点 B. 

C. 直线与直线所成角的范围是 D. 三棱锥的体积为定值是

【答案】BCD

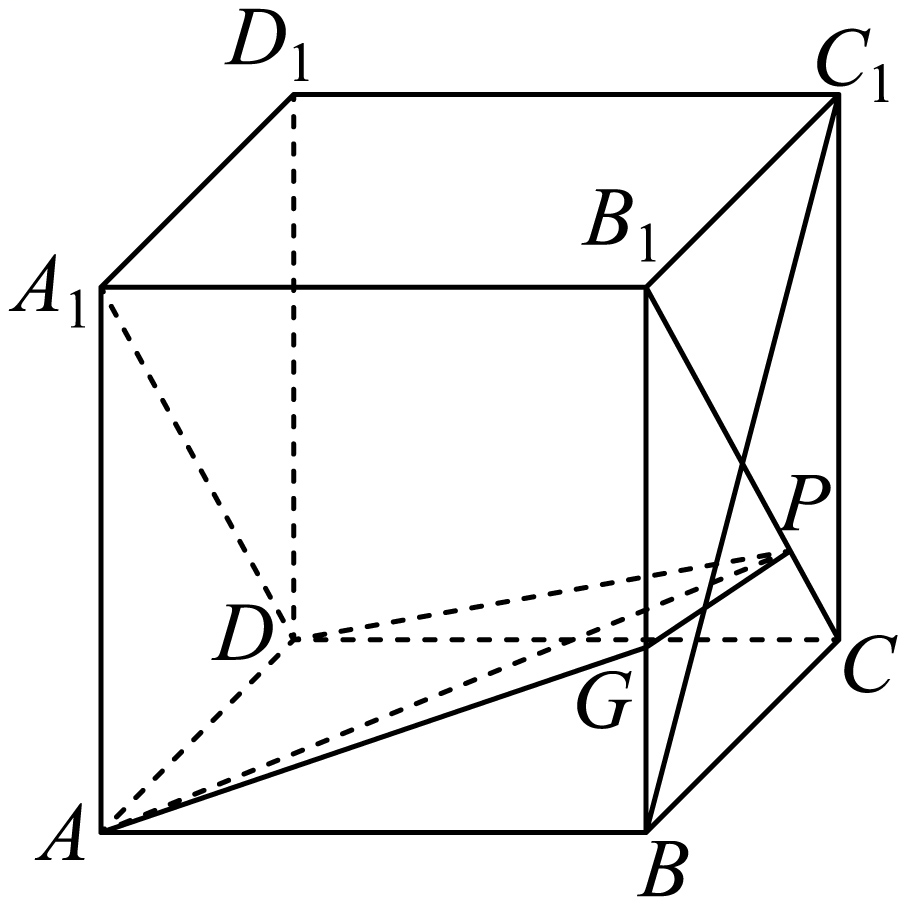
【解析】

【分析】对于选项A，由平面即可判断；对于选项B，由平面即可判断；对于选项C，过点作，则 ，直线与直线所成角为，由，即可判断选项；对于选项D，平面，由即可得到结果.

【详解】对于选项A，因为平面，故错误；

对于选项B，因为,且平面，

所以平面，又因为平面，，故正确；



对于选项C，当点与重合时，直线与直线所成角为；

当点与不重合时，过点作交于点*G*，则 ，

所以直线与直线所成角为，

在中 ，

当点从点运动到时，越来越大，

故 ;

综上：直线与直线所成角的范围是，故C正确；

对于选项D，因为，平面，平面，所以平面，

所以 ，故正确.

故选：BCD.

**第Ⅱ卷（非选择题共92分）**

**三、填空题（本题共3小题，每小题5分，共15分. ）**

12. 假设 ，且与 相互独立，则 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据条件，利用和事件及相互独立事件同时发生的概率公式即可求出结果.

【详解】因为，且与 相互独立，

所以，

故答案为：.

13. 已知椭圆短轴长为4，焦距为，分别是椭圆的左、右焦点，若点为 上的任意一点，的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据椭圆定义，，则，利用基本不等式求解即可.

【详解】，





当且仅当时等号成立，

的最小值为，

故答案为：.

14. 2024央视春晚魔术表演的背景是约瑟夫问题，这是一个经典的数学问题，用数学语言可描述为：将数字 顺时针排列在圆周上，首先取走数字2，然后按照顺时针方向，每隔一个数字就取走一个数字，……直到圆周上只剩下一个数字，将这个数字记为 . 例如 时，操作可知 ，则 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】65

【解析】

【分析】探索，，，，的关系，确定的值.

【详解】由题意，圆周上顺时针排列时，可得，就是这个数中的第个；

当圆周上顺时针排列时，第一轮操作将划去所有偶数，留下共个数，它们的第个数是，所以，是这个数中的第个；

当圆周上顺时针排列时，第一轮操作将划去所有偶数，留下共个数，它们的第个数是，所以，是这个数中的第个；

当圆周上顺时针排列时，第一轮操作将划去所有偶数，留下共个数，它们的第个数是，所以，是这个数中的第个；

当圆周上顺时针排列时，第一轮操作将划去所有偶数，留下共个数，它们的第个数是，所以.

故答案为：

**四、解答题（本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. ）**

15. 已知集合 .

（1）若 ，求 ;

（2）若“ ”是“ ”充分不必要条件，求实数 的取值范围.

【答案】（1）或

（2）

【解析】

【分析】（1）根据集合的交集，补集运算即可求解；

（2）将充分不必要条件转化为真子集关系，即可列不等式组求解.

【小问1详解】

当时，，

所以，所以或

【小问2详解】

因为“ ”是“ ”充分不必要条件，

所以

时，，所以；

时， ，所以 ，

综上，取值范围是

16. 已知数列 的前 项和为 ，若 ，且 .

（1）求数列 的通项公式；

（2）若 ，求数列 的前 项和 .

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）由与的关系求数列的通项公式；

（2）利用“错位相减法”求数列前项的和.

【小问1详解】

当时，.

当时，，用代替，可得：

两式相减得：，

又，

所以 是以3为首项3为公比的等比数列，所以 .

【小问2详解】

，

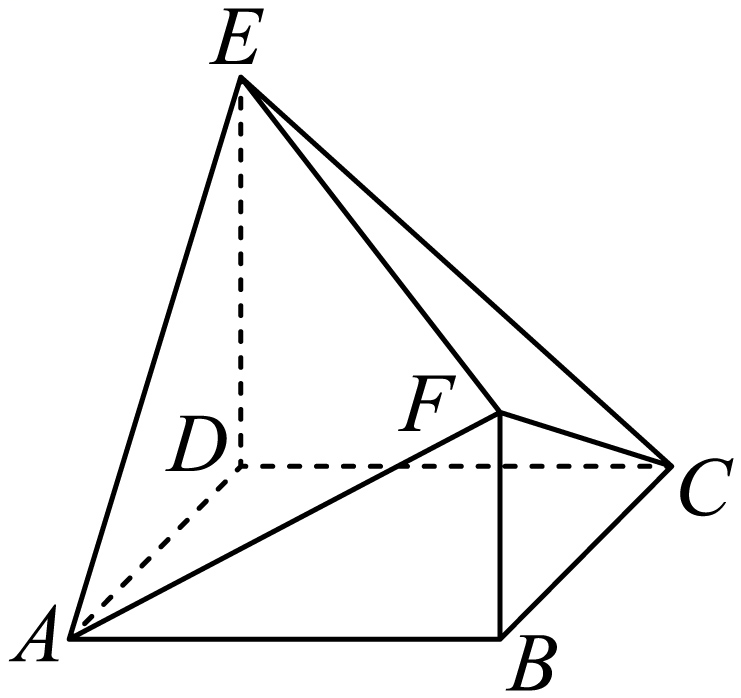
所以：



两式相减得：，

所以： .

17. 如图，在几何体中，底面为边长为2的正方形，平面.



（1）证明：平面 ；

（2）求二面角的大小.

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）由线面垂直的判定定理和性质定理证明即可；

（2）以为原点，所在直线分别为轴建立空间直角坐标系，分别求出平面和平面的法向量，由二面角的向量公式求解即可.

【小问1详解】

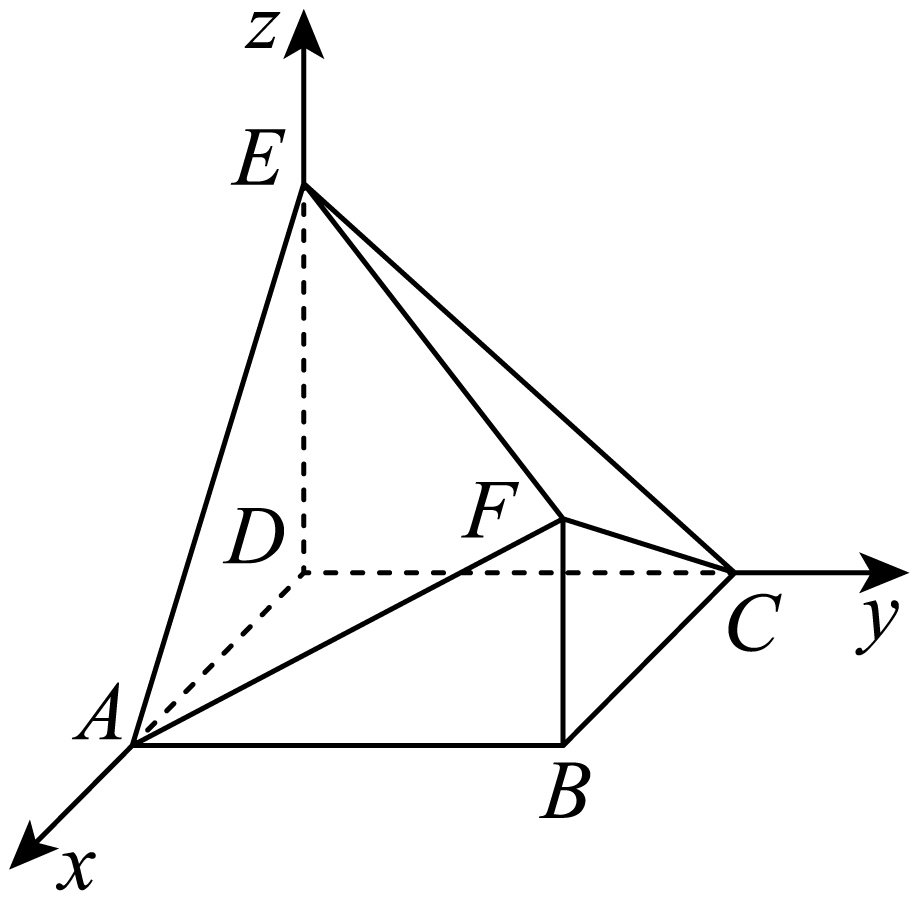
正方形，，

又平面，，

又，平面，平面

【小问2详解】

以为原点，所在直线分别为轴建立空间直角坐标系



所以，

，设 为平面的一个法向量，

则，即，令，则，

所以

设 为平面的一个法向量，

，

则，即，令，则，

平面法向量为，

计算得，所以二面角 的大小为.

18. 已知圆 ，过定点 作与 轴不重合的直线 交曲线 于 两点.

（1）过点作与直线 垂直的直线 交曲线 于、两点，求四边形 面积的最大值；

（2）设曲线 与 轴交于 两点，直线 与直线 相交于点 ，试讨论点 是否在定直线上，若是，求出该直线方程；若不是，说明理由.

【答案】（1）

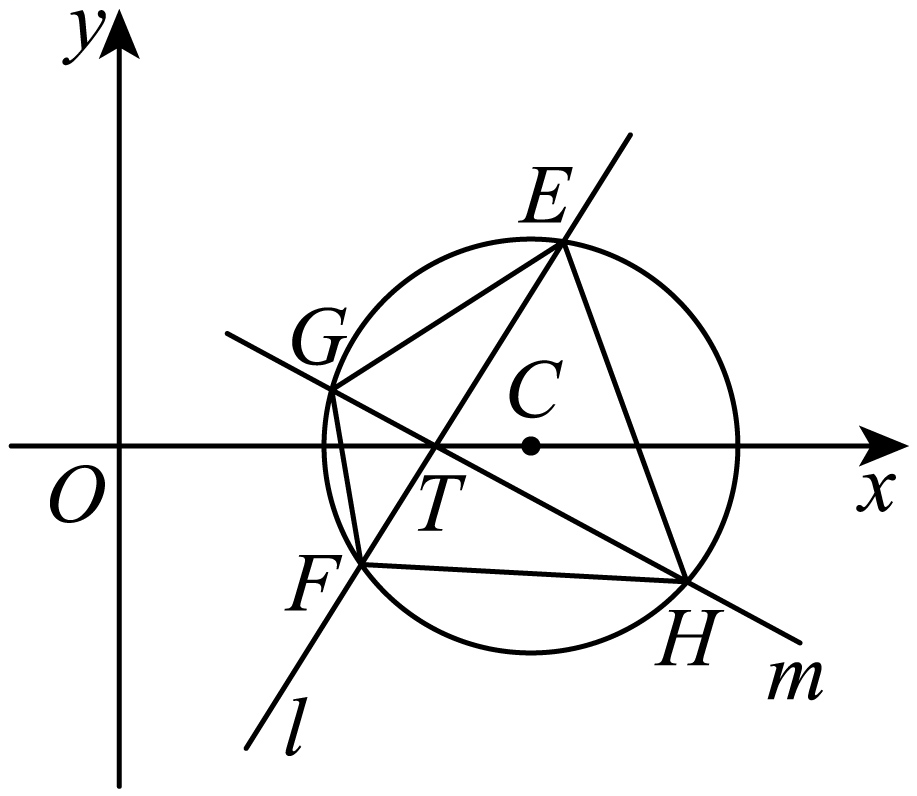
（2）点 在定直线上，定直线为

【解析】

【分析】（1）方法一：设点到直线 距离分别为 ，结合弦长公式与基本不等式代入计算，即可得到结果；方法二：设直线，分别表示出，分与讨论，然后结合四边形的面积公式计算，即可得到结果；

（2）根据题意，联立直线与圆的方程，结合韦达定理代入计算，即可证明.

【小问1详解】



法一：令点到直线 距离分别为 ，则 ，

 ，

，

当且仅 时取到最大值7，

法二：令，则  ，

当时，，



当且仅当 时 取到最大值7，

当时，

综上，当 时 取到最大值7，

【小问2详解】

不妨记 ，令 ，

 ，

恒成立，，

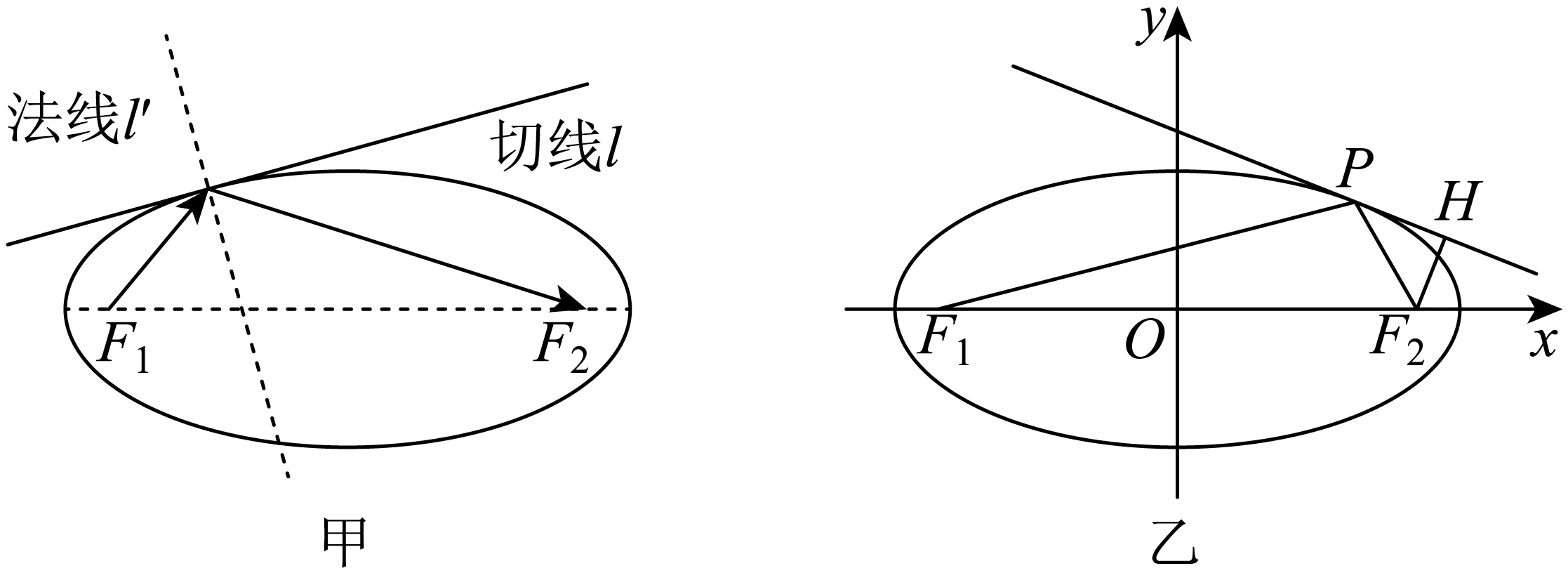
 ，

，

，所以点恒在定直线 上.

19. 历史上第一个研究圆锥曲线的是梅纳库莫斯（公元前375年——325年），大约100年后，阿波罗尼斯更详尽、系统地研究了圆锥曲线，并且他还进一步研究了这些圆锥曲线的光学性质：如图甲，从椭圆的一个焦点出发的光线或声波，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点，其中法线表示与椭圆的切线垂直且过相应切点的直线.

已知图乙中，椭圆 中心在坐标原点，焦点为，由 发出的光线经椭圆两次反射后回到 经过的路程为 .



（1）点 是椭圆 上除顶点外的任意一点，椭圆 在点 处的切线为在 上的射影 满足，利用椭圆的光学性质求椭圆 的方程；

（2）在: （1）的条件下，设椭圆 上顶点为 ，点 为 轴上不同于椭圆顶点的点，且，直线 分别与椭圆 交于点 （异于点 ），，垂足为 ，求 的最小值.

【答案】（1）

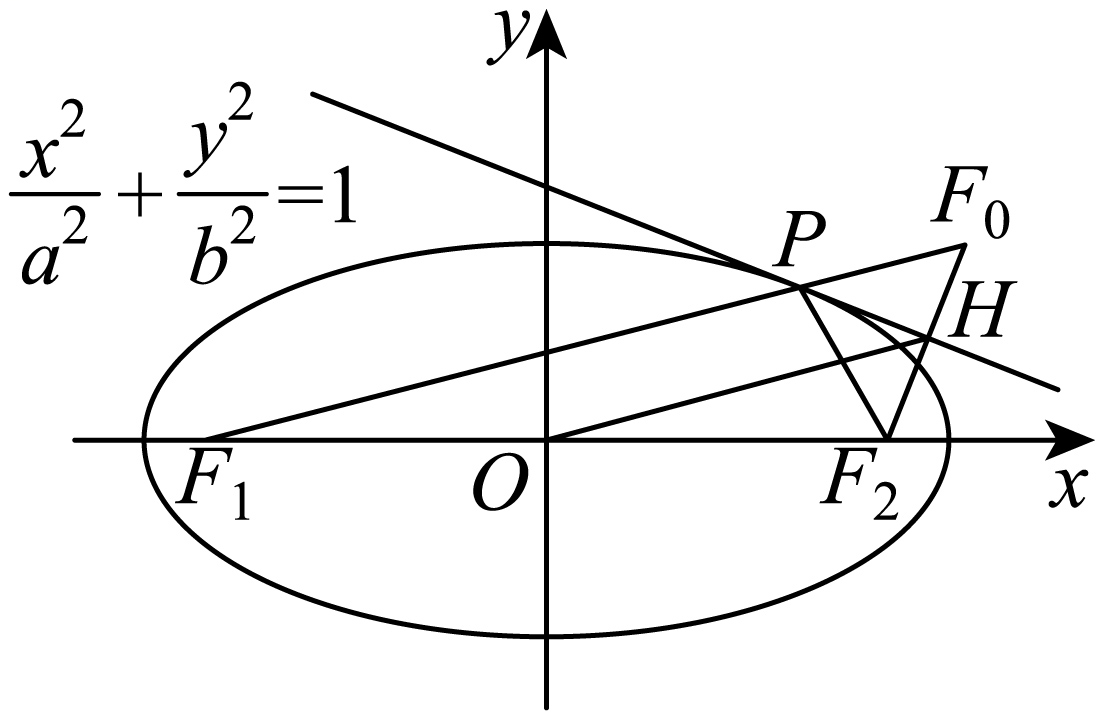
（2）

【解析】

【分析】（1）根据题意，延长，交于点，利用，求出，进而得到椭圆方程.

（2）设直线，联立直线与 ，结合题干，得到点轨迹，求得的最小值.

【小问1详解】



由题知 ，

延长，交于点，

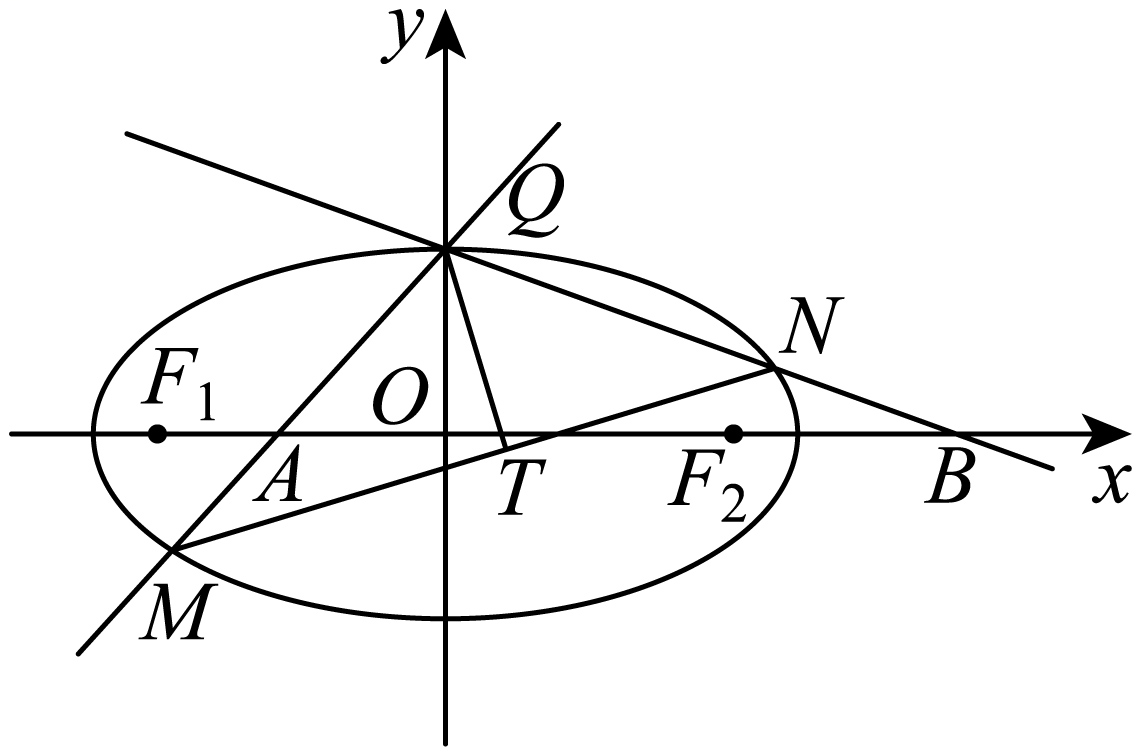
在中，，

则且为中点，

在中，，则，

，即椭圆方程为.

【小问2详解】



由对称性可知直线 的斜率不为0，所以可设直线，

联立直线与 ，

则，①

，②

所以 ，令 ，得点横坐标 ，

同理可得点 横坐标 ，

故，

将 代入上式整理得：，

将②代入得 ，

若 ，则直线 ，恒过 不合题意；

若 ，则，恒过 ，

因为直线 恒过 ，且与 始终有两个交点，

又，垂足为 ，

所以点 轨迹是以 为直径的半圆（不含点 ，在直线 下方部分），

圆心 ，半径为1，所以，当且仅当点 在线段 上时，

所以的最小值为.

【点睛】关键点点睛：本题第二问，设直线，联立直线与 ，结合题干，得到点轨迹，求得的最小值.