**按秘密级事项管理★启用前**

**2024年普通高等学校招生全国统一考试**

**数学模拟测试**

**本试卷共150分 考试时间120分钟**

**注意事项：**

**1．答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．**

**2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．**

**3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．复数的实部为（ ）

A． B． C． D．

2．已知集合，，，则集合*P*的子集共有（ ）

A．2个 B．3个 C．4个 D．8个

3．已知向量与的夹角为，且，，则（ ）

A． B． C．4 D．

4．已知有5人的身高各不相同，若安排5人拍照，前排2人，后排3人，且后排3人中身高最高的站在中间，则不同的站法种数为（ ）

A．32 B．36 C．40 D．42

5．已知在三棱锥中，，则直线与平面所成的角的正弦值为（ ）

A． B． C． D．

6．某企业的废水治理小组积极探索改良工艺，致力于使排放的废水中含有的污染物数量逐渐减少．已知改良工艺前排放的废水中含有的污染物数量为，首次改良工艺后排放的废水中含有的污染物数量为，第*n*次改良工艺后排放的废水中含有的污染物数量满足函数模型（，），其中为改良工艺前排放的废水中含有的污染物数量，为首次改良工艺后排放的废水中含有的污染物数量，*n*为改良工艺的次数．假设废水中含有的污染物数量不超过时符合废水排放标准，若该企业排放的废水符合排放标准，则改良工艺的次数最少为（ ）（参考数据：，）

A．12 B．13 C．14 D．15

7．已知抛物线的焦点为*F*，直线*l*交抛物线*T*于*A*，*B*两点，*M*为线段的中点，过点*M*作抛物线*T*的准线的垂线，垂足为*N*，若，则的最大值为（ ）

A．1 B． C． D．

8．某包装设计部门为一球形塑料玩具设计一种正四面体形状的外包装盒（盒子厚度忽略不计），已知该球形玩具的直径为2，每盒需放入10个塑料球，则该种外包装盒的棱长的最小值为（ ）

A． B． C． D．

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．**

9．已知圆，圆，则下列选项正确的是（ ）

A．直线的方程为

B．圆和圆共有4条公切线

C．若*P*，*Q*分别是圆和圆上的动点，则的最大值为10

D．经过点，的所有圆中面积最小的圆的面积为

10．已知函数在上有且仅有5个零点，则（ ）

A．的取值范围是

B．的图象在上有且仅有3个最高点

C．的图象在上最多有3个最低点

D．在上单调递增

11．已知函数，则（ ）

A．当时，有极小值 B．当时，有极大值

C．若，则 D．函数的零点最多有1个

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题序 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 答案 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．**

12．已知，则\_\_\_\_\_\_．

13．自然界中某些生物的基因型是由雌雄配子的基因组合而成的，这种生物在生育下一代时，成对的基因相互分离形成配子，配子随机结合形成下一代的基因型．若某生物群体的基因型为，在该生物个体的随机交配过程中，基因型为的子代因无法适应自然环境而被自然界淘汰．例如当亲代只有的基因型个体时，其子一代的基因型如下表所示：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 雌 | 雄 | |
|  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

由上表可知，子一代中，子一代产生的配子中*A*占，*a*占，以此类推，子七代中的个体所占的比例为\_\_\_\_\_\_．

14．已知椭圆的左、右焦点分别为，，*P*为椭圆*T*上一点，且，若的外接圆面积是其内切圆面积的25倍，则椭圆*T*的离心率\_\_\_\_\_\_．

**四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

15．（13分）

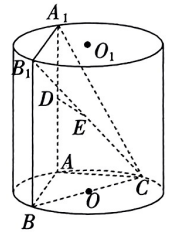
已知在中，角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，且．

（1）求*C*；

（2）求的最大值．

16．（15分）

如图，已知在圆柱中，*A*，*B*，*C*是底面圆*O*上的三个点，且线段为圆*O*的直径，，为圆柱上底面上的两点，且矩形平面，*D*，*E*分别是，的中点．



（1）证明：平面．

（2）若是等腰直角三角形，且平面，求平面与平面的夹角的正弦值．

17．（15分）

某景区的索道共有三种购票类型，分别为单程上山票、单程下山票、双程上下山票．为提高服务水平，现对当日购票的120人征集意见，当日购买单程上山票、单程下山票和双程票的人数分别为36、60和24．

（1）若按购票类型采用分层随机抽样的方法从这120人中随机抽取10人，再从这10人中随机抽取4人，求随机抽取的4人中恰有2人购买单程上山票的概率．

（2）记单程下山票和双程票为回程票，若在征集意见时要求把购买单程上山票的2人和购买回程票的*m*（且）人组成一组，负责人从某组中任选2人进行询问，若选出的2人的购票类型相同，则该组标为*A*，否则该组标为*B*，记询问的某组被标为*B*的概率为*p*．

（i）试用含*m*的代数式表示*p*；

（ii）若一共询问了5组，用表示恰有3组被标为*B*的概率，试求的最大值及此时*m*的值．

18．（17分）

已知函数，．

（1）讨论的单调性；

（2）若，恒成立，求实数*a*的取值范围．

19．（17分）

已知双曲线的一条渐近线方程为，右焦点*F*到渐近线的距离为．

（1）求双曲线*C*的标准方程；

（2）若双曲线上动点*Q*处的切线交*C*的两条渐近线于*A*，*B*两点，其中*O*为坐标原点，求证：的面积*S*是定值．

**2024年普通高等学校招生全国统一考试**

**数学模拟测试参考答案**

1．A【命题意图】本题考查复数的运算和复数的概念，要求考生会求复数的实部．

【解题分析】，故A项正确．

2．C【命题意图】本题考查集合的运算，要求考生理解交集和子集的含义．

【解题分析】因为，，

所以，所以，则集合*P*的子集共有个．

3．A【命题意图】本题考查向量的数量积，要求考生会进行向量数量积的运算．

【解题分析】由题意可得，，

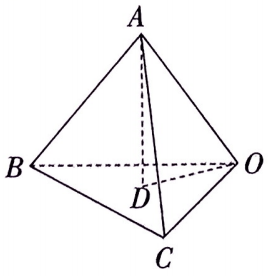
所以．

4．C【命题意图】本题考查排列组合，要求考生会进行简单的排列组合计算．

【解题分析】先排前排，有种站法，后排3人中身高最高的站中间，则两边的人有种站法，则有种站法．

5．D【命题意图】本题考查线面角，要求考生利用几何体的性质求线面角的正弦值．

【解题分析】设*A*，*B*，*C*，*O*是正四面体的4个顶点，则点*A*在平面的射影是正三角形的中心*D*．设，则，可得，高，则直线与平面所成的角的正弦值．



6．D【命题意图】本题考查指、对数的运算，要求考生能利用指、对数的运算解决实际问题．

【解题分析】由题意知，，

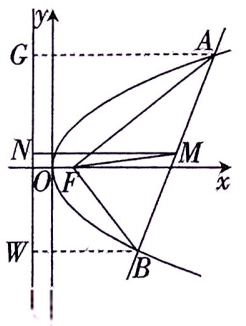
当时，，故，，故．

由，得，即，则，而，

故，故若该企业排放的废水符合排放标准，则改良工艺的次数最少要15次．

7．B【命题意图】本题考查抛物线，要求考生能利用抛物线的性质和基本不等式解决问题．

【解题分析】设，，因为，所以，所以，过点*A*，*B*分别作，垂直准线于点*G*，*W*，



由抛物线的定义可知，，由梯形的中位线可知．

因为，所以，

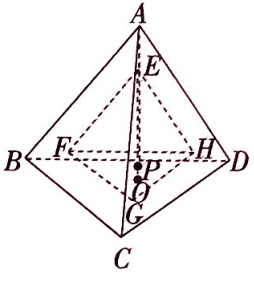
当且仅当时，等号成立，所以

所以，故的最大值为．

8．C【命题意图】本题考查几何体的内切问题，要求考生具有较强的直观想象素养，能灵活应用简单几何体的性质求空间几何体的内切问题．

【解题分析】易知正四面体的高等于其棱长的，正四面体的内切球的半径等于其棱长的．

如图，10个直径为2的小球放进棱长为*a*的正四面体中，构成三棱锥的形状，有3层，从上到下每层的小球个数依次为1，3，6．



当*a*取得最小值时，从上到下每层中放在边缘的小球都与正四面体的侧面相切，底层的每个球都与正四面体的底面相切，任意相邻的两个小球都外切，位于底层正三角状顶点的所有相邻小球的球心连线为一个正四面体，则该正四面体的棱长为，可求得其高为，，所以正四面体的高为，进而可求得其棱长*a*的最小值为．

9．ACD【命题意图】本题考查圆与圆的位置关系，要求考生了解圆的定义与方程，能利用圆的性质解决简单的问题．

【解题分析】由题意可知圆的圆心，半径，

圆的圆心，半径，

直线的方程为，即，故A正确；

因为，可知圆与圆外切，所以两圆的公切线共有3条，故B错误；

因为，所以的最大值为，故C正确；

当为圆的直径时，该圆在经过点，的所有圆中面积最小，此时圆的面积为．故D正确．

10．BC【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质，要求考生理解三角函数的图象与性质，熟练使用三角函数的性质及不等式的性质求解相关问题．

【解题分析】由，，得，，所以函数在上由小到大的第5个零点为，第6个零点为，

由题知，，解得，A项错误．

令，解得，，

当时，，因为，所以，，

当且仅当，1，2时，，故在上有且仅有3个最高点，B项正确．

令，解得，，

同上可知，，，

当，2时，，当时，令，解得，所以当时，在上有3个最低点，C项正确．

由，得，所以在区间上单调递增，因为，所以，又因为，所以在区间上不单调，D项错误．

11．AC【命题意图】本题考查导数的综合应用，要求考生能通过导数有无变号的零点来判断函数的极值，能通过构造函数的方法讨论函数的零点问题．

【解题分析】当时，，

令，变形可得，结合函数图象（图略）可知，存在，使得，当时，，函数单调递减，当时，，函数单调递增，故A项正确，B项错误．

若，即，则．设，则．设，可知，则，．

若，则，为减函数，注意到，可知当时，，不合题意．

若，则，当时，，为减函数，当时，，为增函数，所以．设，，则，．当时，，为减函数，当时，，为增函数，则，所以只有当时，才能成立．

综上所述，，故C项正确．

由C项可知，，，则，所以为增函数．

当时，，当*t*无限趋近于0时，无限趋近于，且，即此时有两个零点，因为为增函数，且，所以此时有两个零点．同理可得，当时，有两个零点．当时，，此时有一个零点1，所以有一个零点．当时，为减函数，，此时有一个零点1，即只有一个零点．综上，函数最多有两个零点，故D项错误．

12．【命题意图】本题考查三角恒等变换，要求考生能熟练地使用两角和的余弦公式及二倍角公式解决问题．

【解题分析】因为，整理得，

所以，所以，

所以．

13．【命题意图】本题考查数列的综合应用，要求考生能从实际问题中抽象出数列的递推关系式，能利用等差数列解决实际问题．

【解题分析】设子*n*代中占比为，则占比为，

所以，则子代的基因型如下表所示：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 雌 | 雄 | |
|  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

由表可知，表格中总份数为（其中淘汰了份），

因此子代中的占比为，

化简得，即，即，

所以数列是首项为，公差为的等差数列，

所以，，因此．

14．【命题意图】本题考查椭圆的离心率，要求考生能利用椭圆的相关性质求解椭圆焦点三角形的外接圆与内切圆的半径问题．

【解题分析】因为，且，，

所以



，所以，

所以的面积．

设的外接圆的半径为*R*，内切圆的半径为*r*，

由正弦定理可得，可得．

易知的周长，

利用等面积法可知，解得．

又的外接圆面积是其内切圆面积的25倍，即，

所以，即，所以，故离心率．

15．【命题意图】本题考查解三角形，要求考生能利用正弦定理与余弦定理求解三角形的相关问题．

【解题分析】（1）因为，结合正弦定理得，

移项得，所以．

又因为，所以．

（2）因为，所以，



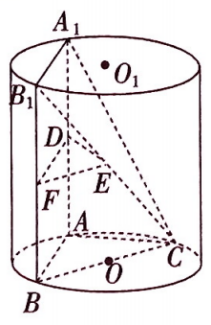
由基本不等式得，

所以，当且仅当时，等号成立，

解得，所以的最大值为．

16．【命题意图】本题考查线面平行与空间向量在立体几何中的应用，要求考生能运用线面平行的判定定理、面面平行的判定定理和性质定理证明线面平行，熟悉向量的方法在研究立体几何问题中的应用．

【解题分析】（1）如图，取的中点*F*，连接，，



因为*D*，*E*，*F*分别为，，的中点，所以，．

又因为平面，平面，平面，平面，

所以平面，平面．

因为，，平面，所以平面平面．

又因为平面，所以平面．

（2）如图，连接，．因为*E*，*O*分别为，的中点，所以，且，

又因为*D*为的中点，所以，且，

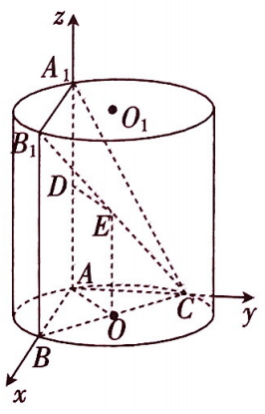
所以，且，所以四边形为平行四边形，所以．

因为平面，所以平面．

又因为平面，所以，可得．

因为是等腰直角三角形，所以．

以*A*为原点，以，，分别为*x*，*y*，*z*轴建立空间直角坐标系，如图所示，



设，则，可得，，，，则，，，．

设平面的法向量为，则，

取，可得，，所以．

设平面的法向量为，则，

取，可得，，所以．

，

所以平面与平面的夹角的正弦值为．

17．【命题意图】本题考查分层随机抽样、离散型随机变量的分布列和数学期望、独立事件的概率，要求考生能有使用统计、概率知识解决实际问题的能力．

【解题分析】（1）因为购买单程上山票、单程下山票和双程票的人数之比为，所以这10人中，购买单程上山票、单程下山票和双程票的人数分别为：，，，

故随机抽取的4人中恰有2人购买单程上山票的概率．

（2）（i）从人中任选2人，有种选法，其中购票类型相同的有种选法，则询问的某组被标为*B*的概率．

（ii）由题意，5组中恰有3组被标为*B*的概率，

所以，，

所以当时，，函数单调递增，

当时，，函数单调递减，

所以当时，取得最大值，且最大值为．

由，且，得．

当时，5组中恰有3组被标为*B*的概率最大，且的最大值为．

18．【命题意图】本题考查导数的综合应用，要求考生能利用导数判断函数的单调性，会使用分离变量的方法求参数的范围．

【解题分析】（1）函数，的定义域为，且．

当时，，恒成立，此时在区间上单调递增；

当时，令，解得，

当时，，在区间上单调递增，

当时，，在区间上单调递减．

综上所述，当时，在区间上单调递增；

当时，在区间上单调递增，在区间上单调递减．

（2）设，则，易知在区间上，，单调递减，在区间上，，单调递增，

所以，所以（当且仅当时等号成立）．

依题意，，恒成立，即恒成立，

而，

当且仅当时等号成立．

因为函数在上单调递增，，，所以存在，使得成立．

所以，即*a*的取值范围是．

19．【命题意图】本题考查双曲线，要求考生能根据双曲线的性质求出双曲线的方程，会利用双曲线上某点的切线方程解决相关的定值问题．

【解题分析】（1）由已知得渐近线方程为，右焦点，．

，，解得．

，，，双曲线*C*的标准方程为．

（2）双曲线上一点的切线方程为，

设，则双曲线上过点的切线的方程为，

双曲线的两条渐近线的方程为．

联立：与，解得．

联立与，解得．

直线的方程为，即，

故点*O*到直线的距离为，

且，

故的面积为

，

故的面积*S*为定值．