**七校联盟2024年第一学月联考**

**高三数学试题**

**命题学校：重庆市长寿中学**

**本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分.满分150分，考试时间120分钟.**

**注意事项：**

**1．答题前，务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡规定的位置上.**

**2．答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑.**

**3．答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上.**

**4．考试结束后，将答题卷交回.**

**第I卷（选择题 共58分）**

**一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.**

1. 若复数满足，则的虚部为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】设复数，代入已知条件求出的值，得的虚部.

详解】设复数，由，

即，则有，解得，

所以的虚部为1.

故选：A.

2. 在的展开式中含项的系数是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据二项式展开式的通项公式，求出展开式中含项的系数是多少.

【详解】解：二项式展开式的通项公式为，

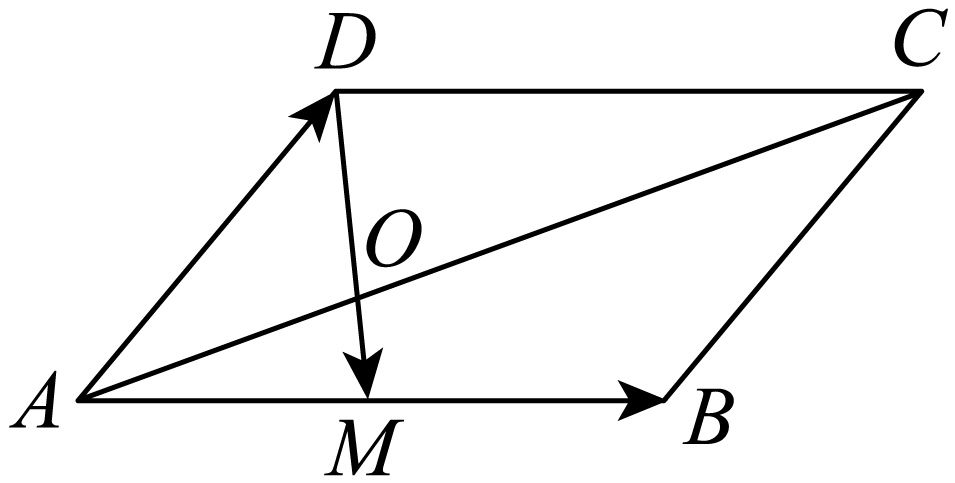
令，得，



即含的系数为240.

故选：C

3. 如图，在平行四边形中，为的中点，与交于点，则（ ）



A.  B. 

C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】利用几何关系，确定，再利用向量线性运算，即可求解.

【详解】因为，且，所以，

即.

故选：D

4. 重庆，我国四大直辖市之一，这里资源丰富，旅游景点也多，不仅有山水自然风光，还有人文历史景观．现有甲、乙两位游客慕名来到重庆旅游，分别准备从巫山小三峡、南川金佛山、大足石刻和酉阳桃花源4个国家5A级旅游景区中随机选择其中一个景区游玩．记事件：甲和乙至少一人选择酉阳桃花源景区，事件：甲和乙选择的景区不同，则概率（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，由条件概率的计算公式，代入计算，即可得到结果.

【详解】甲、乙两位游客分别从4个景区选择一个游玩的总情况数为种，

其中甲和乙至少一人选择酉阳桃花源景区的情况数为，则，

事件表示：甲乙选择的景区不同，且至少一个选择酉阳桃花源景区，

则符合要求的情况数为种，则，

所以.

故选：D

5. 已知，，直线和垂直，则的最小值为（ ）

A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】由题意可得出，再由基本不等式“1”的代换求解即可.

【详解】因为直线和垂直，

所以，所以，

因为，，

所以，

当且仅当，即时取等.

故选：C.

6. 已知函数的定义域均为，，，，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】已知条件可求得，代入2024计算即可.

【详解】，以代，有，

又，得，

所以.

故选：B.

7. 数学家也有许多美丽的错误，如法国数学家费马于1640年提出了以下猜想：是质数．直到1732年才被善于计算的大数学家欧拉算出，不是质数．现设，数列的前项和为，则使不等式成立的正整数的最大值为（ ）

A. 11 B. 10 C. 9 D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】结合已知条件求出的通项公式，并求出，然后利用裂项相消法即可求解.

【详解】依题意，，，

则，

则

，即，而，解得，

所以满足条件的正整数的最大值为.

故选：B

【点睛】易错点睛：使用裂项法求和时，要注意正负项相消时消去了哪些项，保留了哪些项，切不可漏写未被消去的项，未被消去的项有前后对称的特点，实质上造成正负相消是此法的根源与目的．

8. 已知函数，，点与分别在函数与的图象上，若的最小值为，则（ ）

A.  B. 3 C. 或3 D. 1或3

【答案】A

【解析】

【分析】平移直线使其经过点，则切线斜率为1，利用导数求出切点坐标，再根据点到直线距离公式即可得到方程，解出即可.

【详解】因为，令，解得，

而，

则函数的图象在点处的切线方程为，

则，即点到直线的距离为，

所以，解得或，

当时，与函数的图象相交，

所以.

故选：A.

**二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多个选项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.**

9. 下列命题正确的是（ ）

A. 若两组成对数据的样本相关系数分别为，则组数据比组数据的相关性较强

B. 若样本数据的方差为2，则数据的方差为8

C. 已知互不相同的30个样本数据，若去掉其中最大和最小的数据，剩下28个数据的22%分位数不等于原样本数据的22%分位数

D. 某人解答5个问题，答对题数为，若，则

【答案】BCD

【解析】

【分析】对于A，由由相关系数的意义即可判断；对于B，由方程的性质即可判断；对于C，，结合30个样本数据互不相同即可判断；对于D，由二项分布均值公式即可判断.

【详解】对于A，因为，即组数据比组数据相关性较弱，故A错误；

对于B，若样本数据的方差为，则数据的方差为，故B正确；

对于C，将这原来的30个数从小大大排列为，则，所以原来的22%分位数为，

若去掉其中最大和最小的数据，剩下28个数据为，则，所以剩下28个数据的22%分位数为，由于互不相同，所以C正确；

对于D，某人解答5个问题，答对题数为，若，则，故D正确.

故选：BCD.

10. 已知函数，则下列选项正确的是（ ）

A. 是函数的一个周期

B. 是函数的一条对称轴

C. 函数的最大值为，最小值为

D. 函数在上单调递减

【答案】ABC

【解析】

【分析】利用函数周期性及对称性的定义可得A、B，使用换元法，令，可得，结合复合函数单调性可得C、D.

【详解】对A：，

故是函数的一个周期，故A正确；

对B：

，故是函数的一条对称轴，故B正确；

对C、D：令，有，

因为，所以，

则，

由，则函数的最大值为，最小值为，故C正确；

函数由和复合而成，

函数在上先增后减，在上递减，且，

则函数在上不是单调递减，故D错误.

故选：ABC.

11. 设函数，则（ ）

A. 当时，直线不是曲线的切线

B. 当时，函数有三个零点

C. 若有三个不同的零点，，，则

D. 若曲线上有且仅有四点能构成一个正方形，则

【答案】BCD

【解析】

【分析】求导即可判断A，由函数的单调性结合三次函数的图像特征即可判断B，结合零点的定义代入计算，即可判断C，由正方形的特点结合导数的运算即可判断D

【详解】当时，，则，则，

则曲线在点处的切线方程为，故选项错误.

当时，，则，

当和时，，单调递增，

时，，单调递减.

又因为，，结合三次函数的图像特征，

此时，有三个零点，故B选项正确.

设的三个零点分别为，，，

则有，

展开后比对含项的系数，可得，故选项C正确.

当时，易知在上单调递增，

结合图像知不符合题意，故

因为，

因此函数的图像关于点成中心对称图形.

则此正方形必以为中心，

不妨设正方形的四个顶点分别为*A*，，，，

其中一条对角线的方程为，则，

即，解得，则，

同理可得.

由得，

根据题意，方程只有一个正解，

当时，显然不成立.

故，则，

因为，则，设，则.设，

根据题意，只需要直线与函数的图像只有唯一的公共点即可.

结合双勾函数的图像可得，解得.所以选项D正确.

故选：BCD

【点睛】关键点睛：对于选项D：根据函数对称性，结合正方体分析可知只有一个正解，进而可得结果.

**第II卷（非选择题 共92分）**

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.**

12. 已知等差数列满足，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】由是等差数列可得，再求三角函数值即可

【详解】由是等差数列，可得，又，

所以，

所以

故答案为：

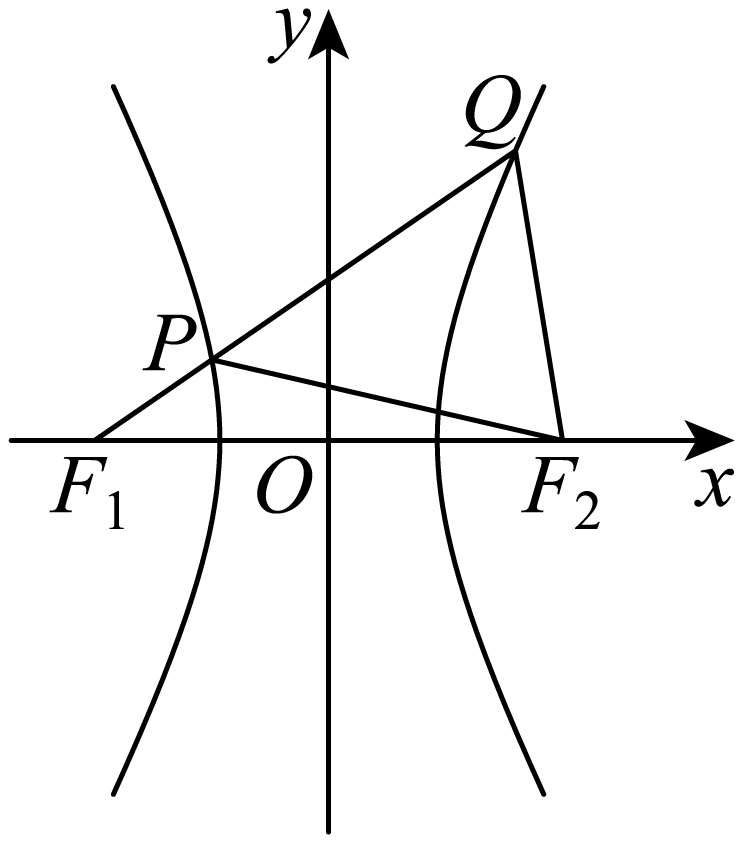
13. 已知双曲线的左右焦点分别为，过的直线分别交双曲线的左，右两支于两点，若为正三角形，则双曲线的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】首先利用双曲线的定义求出和，然后在中用余弦定理即可求解.

【详解】如图所示：



因为是正三角形，所以，，

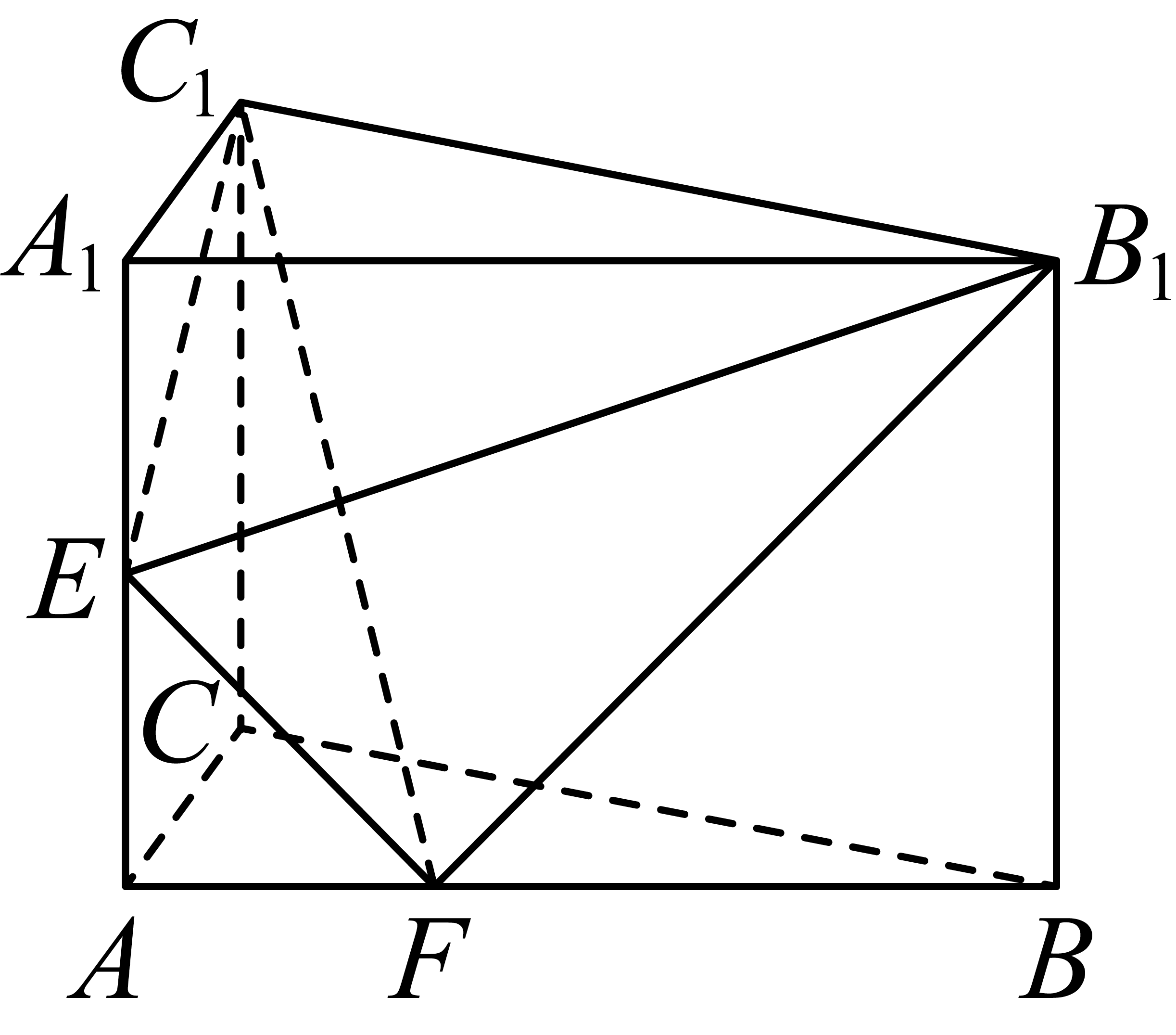
由双曲线定义可知，即，再由可得

在中，，即，

整理得：，，所以

故答案为：

14. 如图，在直三棱柱中，，点*E*，*F*分别是棱，*AB*上的动点，当最小时，三棱锥外接球的表面积为\_\_\_.



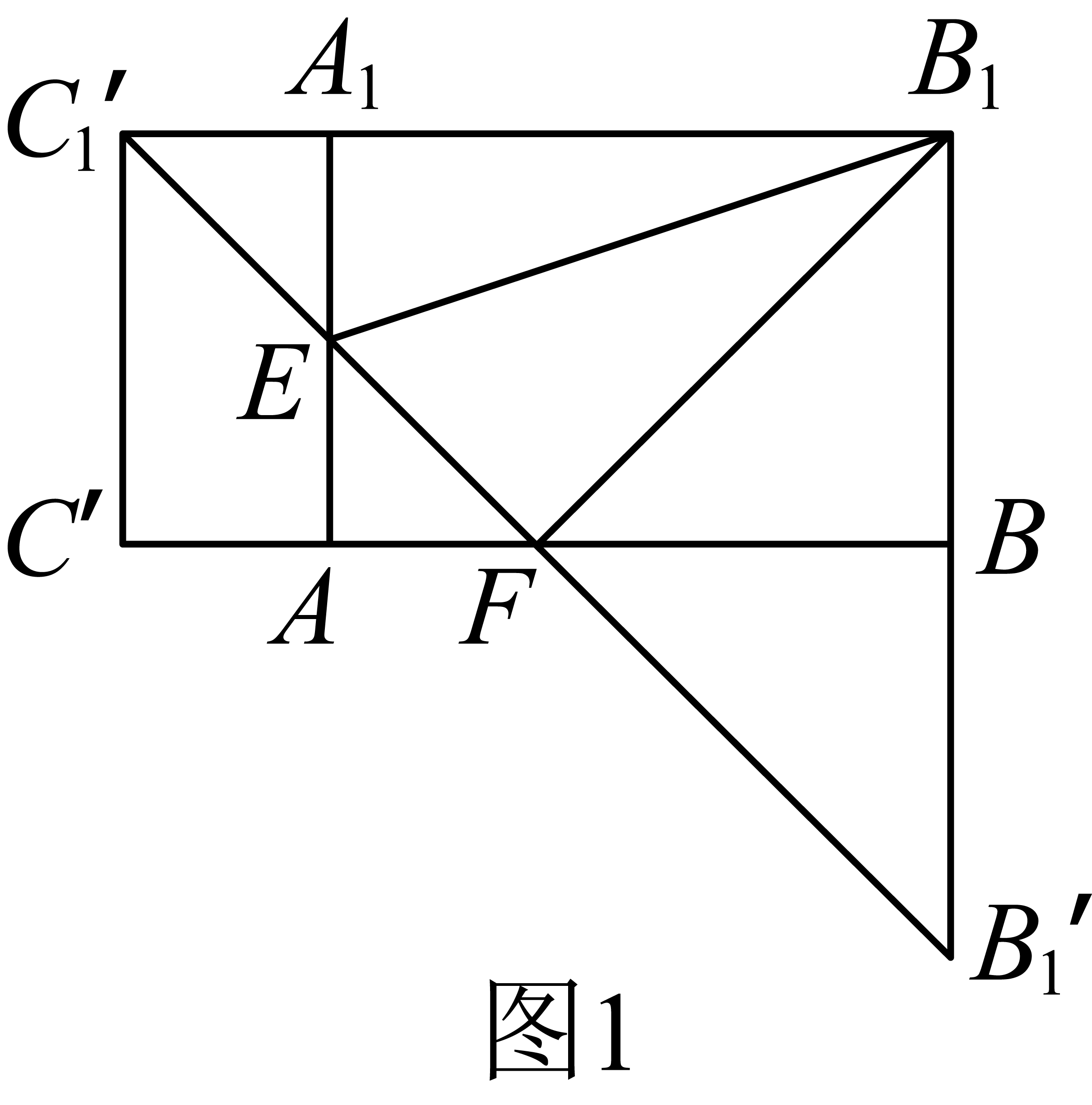
【答案】10π

【解析】

【分析】把平面沿展开到与平面共面的的位置，确定当，，，四点共线时，的长度最小，求出此时的线段的长度，的外接圆是以的中点为圆心，为半径的圆，的外接圆是以的中点为圆心，为半径的圆，即可得外接球的球心与半径，由球的表面积公式求解即可．

【详解】把平面沿展开到与平面共面的的位置，

延长到，使得，连结，如图1所示，



则，要使得的长度最小，则需，，，四点共线，

此时，

因为，，，

所以，

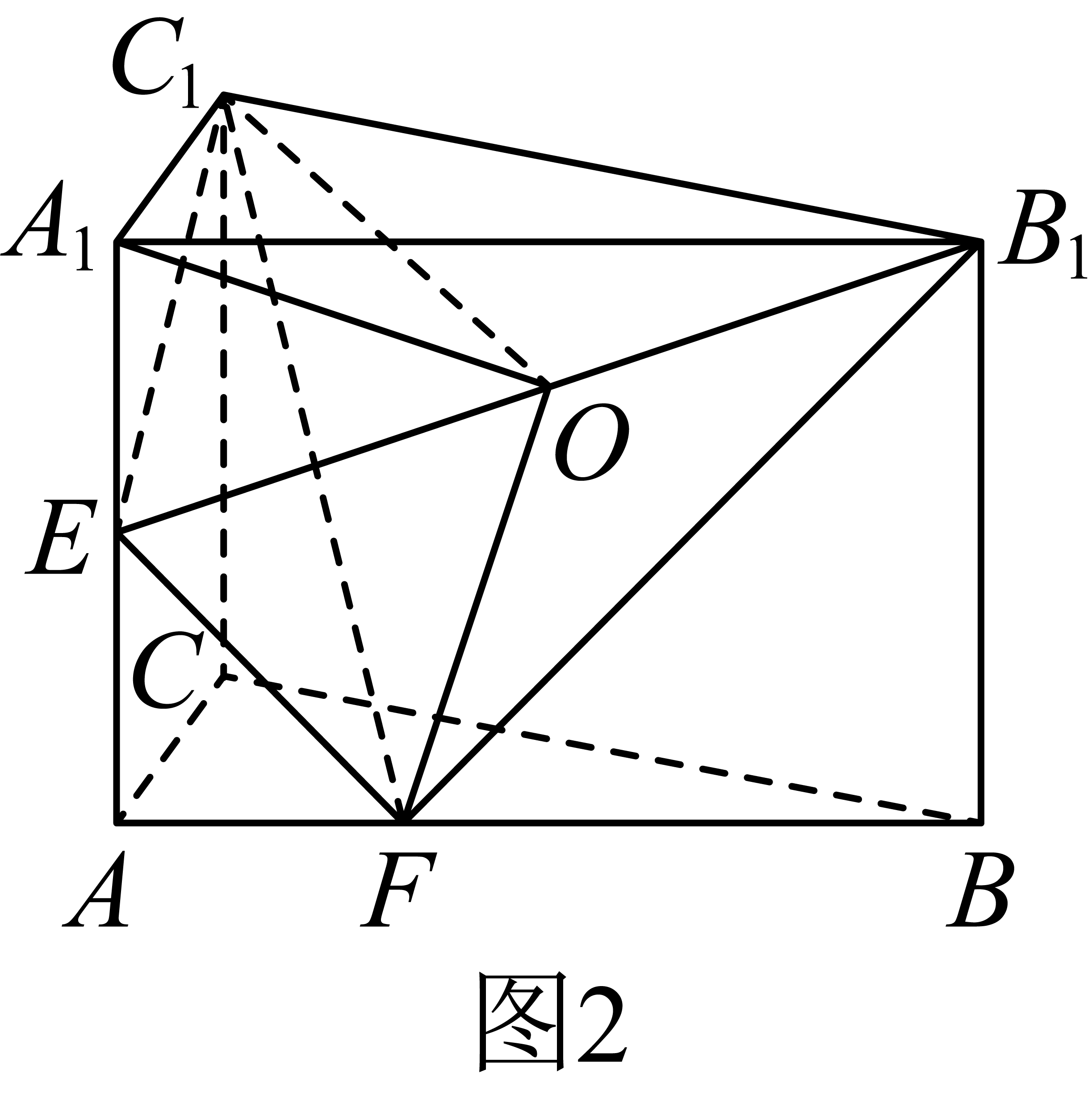
所以，，

故，，

所以，，，，

所以的外接圆是以的中点为圆心，为半径的圆

如图2，连接，



由于，所以，又

所以，

所以的外接圆是以的中点为圆心，为半径的圆

所以三棱锥外接球的球心为，半径为，故外接球的表面积为．

故答案为：．

**四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15. 在中，角，，的对边分别是，，，且.

（1）求角的大小；

（2）若，为边上的一点，，且\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，求的面积．

（从下面①，②两个条件中任选一个，补充在上面的横线上并作答）.

①是的平分线；

②为线段的中点.

【答案】15. 

16. 所选条件见解析，

【解析】

【分析】（1）根据题意，由恒等变换公式化简，即可得到结果；

（2）若选①，由三角形的面积公式结合余弦定理代入计算，即可得到结果；若选②，由向量的运算结合余弦定理，即可得到结果.

【小问1详解】

由倍角公式得：，所以，

因为，即，

所以，所以.

【小问2详解】

若选①：由平分得：，

， 即.

在中，由余弦定理得，则，

联立，得，解得，

，

若选②：由题设，则，

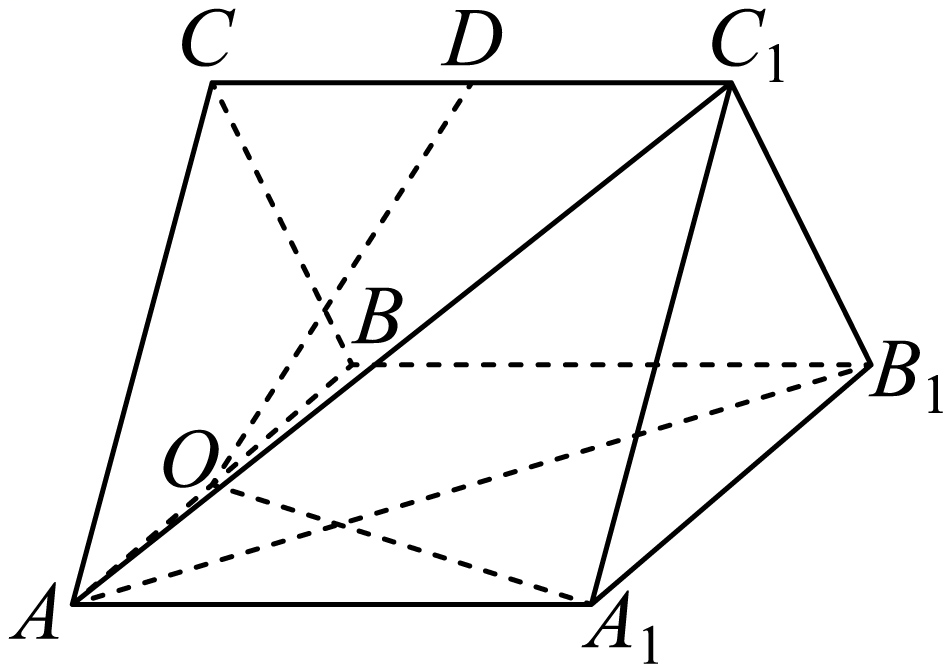
所以，

在中，由余弦定理得，则，

联立，得，

.

16. 如图，在斜三棱柱中，所有棱长均相等，*O*，*D*分别是*AB*，的中点．



（1）证明：平面；

（2）若，且，求平面与平面所成角的余弦值．

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）连接交于点*E*，连接*OE*，，可得四边形为平行四边形，则有，利用线面平行的判定定理可证得平面；

（2）可证得平面*ABC*，以*O*为原点，*OA*，，*OC*所在直线分别为*x*，*y*，*z*轴建立空间直角坐标系，利用空间向量法可求得平面与平面所成二面角的余弦值.

【小问1详解】

连接交于点*E*，连接*OE*，，

∵*O*，*E*分别是*AB*，的中点，*D*为的中点，

∴，

∴四边形为平行四边形，∴．

∵平面，平面，∴平面．

【小问2详解】

连接*OC*，

∵，

∴为正三角形，

∴，

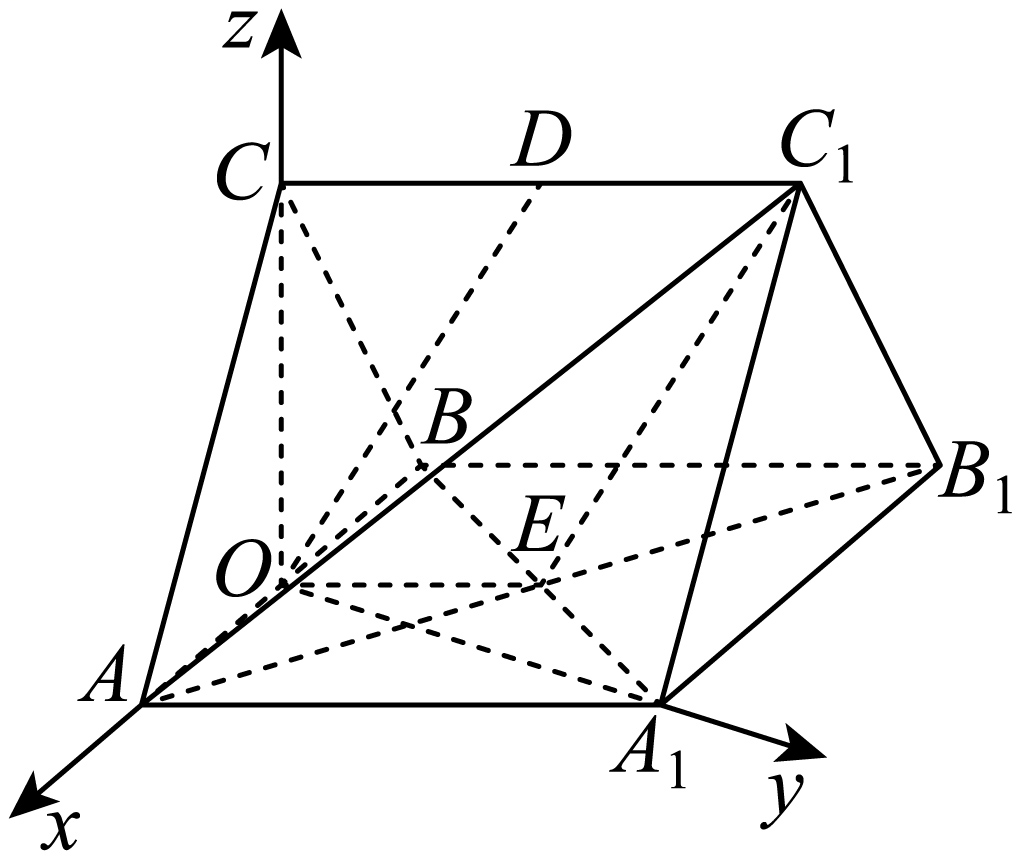
∵，且，

∴平面*ABC*，

∵△*ABC*是正三角形，

∴*CO*⊥*AB*．

以*O*为原点，*OA*，，*OC*所在直线分别为*x*，*y*，*z*轴建立如图所示的空间直角坐标系，



设，则，，，，

由，可得．

则，，，

设平面的法向量为，

∴，即，

令，

∴，

设平面的法向量为，

∴，即，

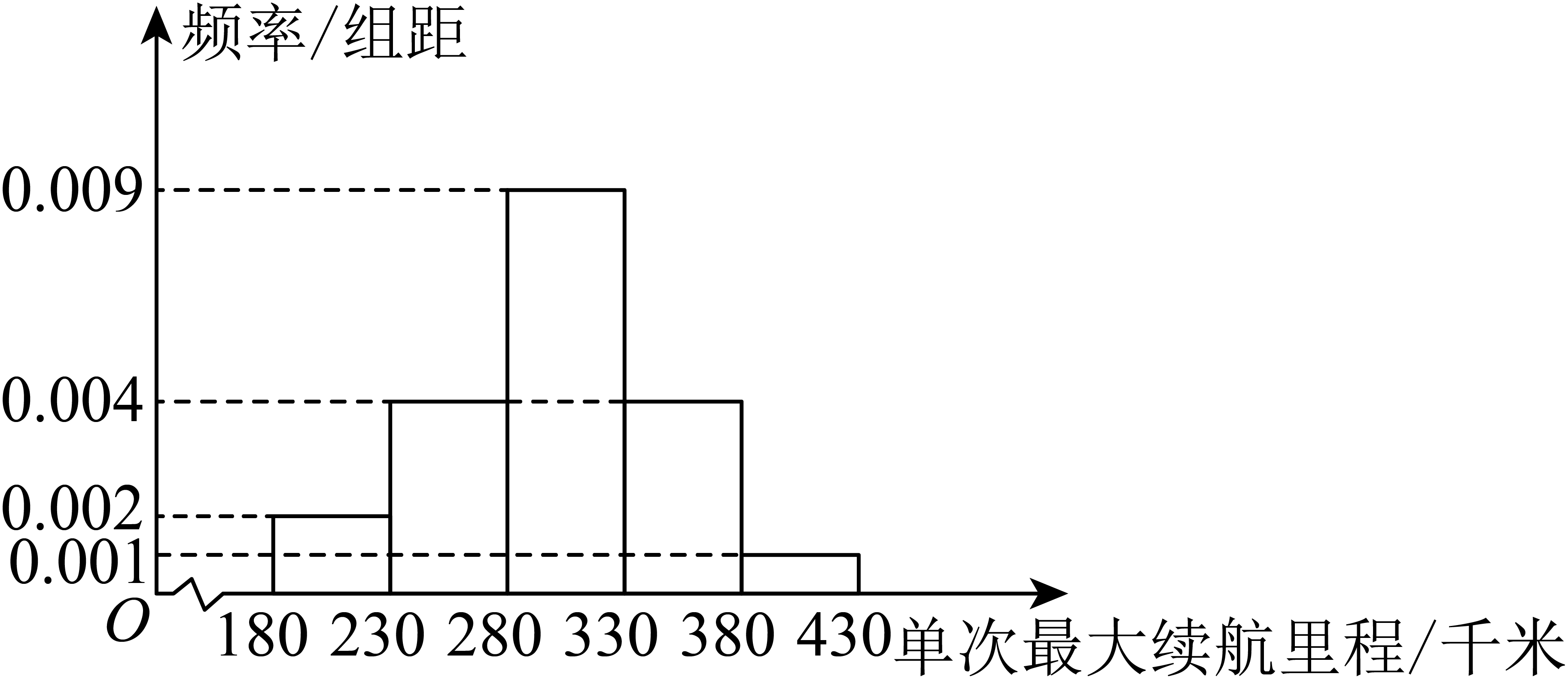
令，∴，

设平面与平面所成的角为，

则，

即平面与平面所成角的余弦值为．

17. 某无人飞机研发中心最近研发了一款新能源无人飞机，在投放市场前对100架新能源无人飞机进行了单次最大续航里程的测试.现对测试数据进行分析，得到如图所示的频率分布直方图：



（1）估计这100架新能源无人飞机的单次最大续航里程的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）；

（2）经计算第（1）问中样本标准差的近似值为50，根据大量的测试数据，可以认为这款新能源无人飞机的单次最大续航里程近似地服从正态分布（用样本平均数和标准差分别作为和的近似值），现任取一架新能源无人飞机，求它的单次最大续航里程的概率；（参考数据：若随机变量，则）

（3）该无人飞机研发中心依据新能源无人飞机的载重量和续航能力分为卓越*A*型､卓越型和卓越型，统计分析可知卓越*A*型､卓越型和卓越型的分布比例为，研发中心在投放市场前决定分别按卓越*A*型､卓越型和卓越型的分布比例分层随机共抽取6架，然后再从这6架中随机抽取3架进行综合性能测试，记随机变量是综合性能测试的3架中卓越*A*型的架数，求随机变量的分布列和数学期望.

【答案】（1）

（2）

（3）分布列见解析，数学期望为

【解析】

【分析】（1）由直方图中每个区间中点值乘以相应频率再相加可得；

（2）根据正态分布的概率性质计算；

（3）随机变量的可能取值为，分别求出其概率后得分布列，再由期望公式计算期望．

【小问1详解】

估计这100架新能源无人飞机的单次最大续航里程的平均值为：.

【小问2详解】

，

.

【小问3详解】

由题设可知抽取的6架新能源无人飞机中，卓越*A*型､卓越型和卓越型的架数分别为3架､2架和1架，随机变量的可能取值为.

，

，

随机变量的分布列如下表：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

.

18. 已知实数，函数有两个不同的零点．

（1）求实数的取值范围，

（2）设是方程的实根，证明：．

【答案】（1）

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）分和两种情况讨论，求出函数的单调区间及最值，再结合题意即可得解；

（2）由（1）知是函数的两个不同零点，不妨设，根据，作差可得，则要证，即证，即证，设，则只需证，即证，设，利用导数求证即可；再证，由题意可得，再根据,可得,则,设，利用导数判断函数的单调性即可得证.

【小问1详解】

，

当时，，则在上单调递增，

所以函数最多一个零点，不符题意；

当时，令，则，令，则，

所以函数在上单调递增，在上单调递减，

所以，

又当时，，当时，，

要使函数有两个不同的零点，

则，解得，

综上所述，；

【小问2详解】

由（1）知是函数的两个不同零点，不妨设，

则有，即，，

作差得，

先证，即证，即证，

设，则只需证，即证，

设，则，

则在上单调递增，则，

则成立，也即成立；

再证，因为是方程的根，则，

又有，，

则，则，

因为函数单调递增，则，

故要证，只需证，即证，

只需证，因为，则，

且在上单调递减，则只需证，

又因为，即证，

设，

则，

则在上单调递减，

则，则，

从而，故成立.

综上所述，．

【点睛】方法点睛：利用导数解决函数零点问题的方法：

（1）直接法：先对函数求导，根据导数的方法求出函数的单调区间与极值，根据函数的基本性质作出图象，然后将问题转化为函数图象与轴的交点问题，突出导数的工具作用，体现了转化与化归思想、数形结合思想和分类讨论思想的应用；

（2）构造新函数法：将问题转化为研究两函数图象的交点问题；

（3）参变量分离法：由分离变量得出，将问题等价转化为直线与函数的图象的交点问题.

19. 在平面直角坐标系中，点在抛物线上.

（1）求的准线方程.

（2）已知点，，是的两条切线，，是切点，圆经过点，，.

①若，求证：；

②设圆在，处的切线的交点为，求证：直线过定点.

**附：**若点在圆上，则圆在点处的切线方程为.

【答案】（1）

（2）①证明见解析；②证明见解析

【解析】

【分析】（1）把代入抛物线方程解出，可得准线方程；

（2）①利用导数求过点的切线方程，可得直线方程，与抛物线方程联立利用韦达定理和向量的夹角计算，证明；②设圆的方程，由圆经过点，，，化简方程，由切线方程，可得直线方程，与①中的方程联立得交点的坐标，表示出直线的方程，由方程确定所过定点.

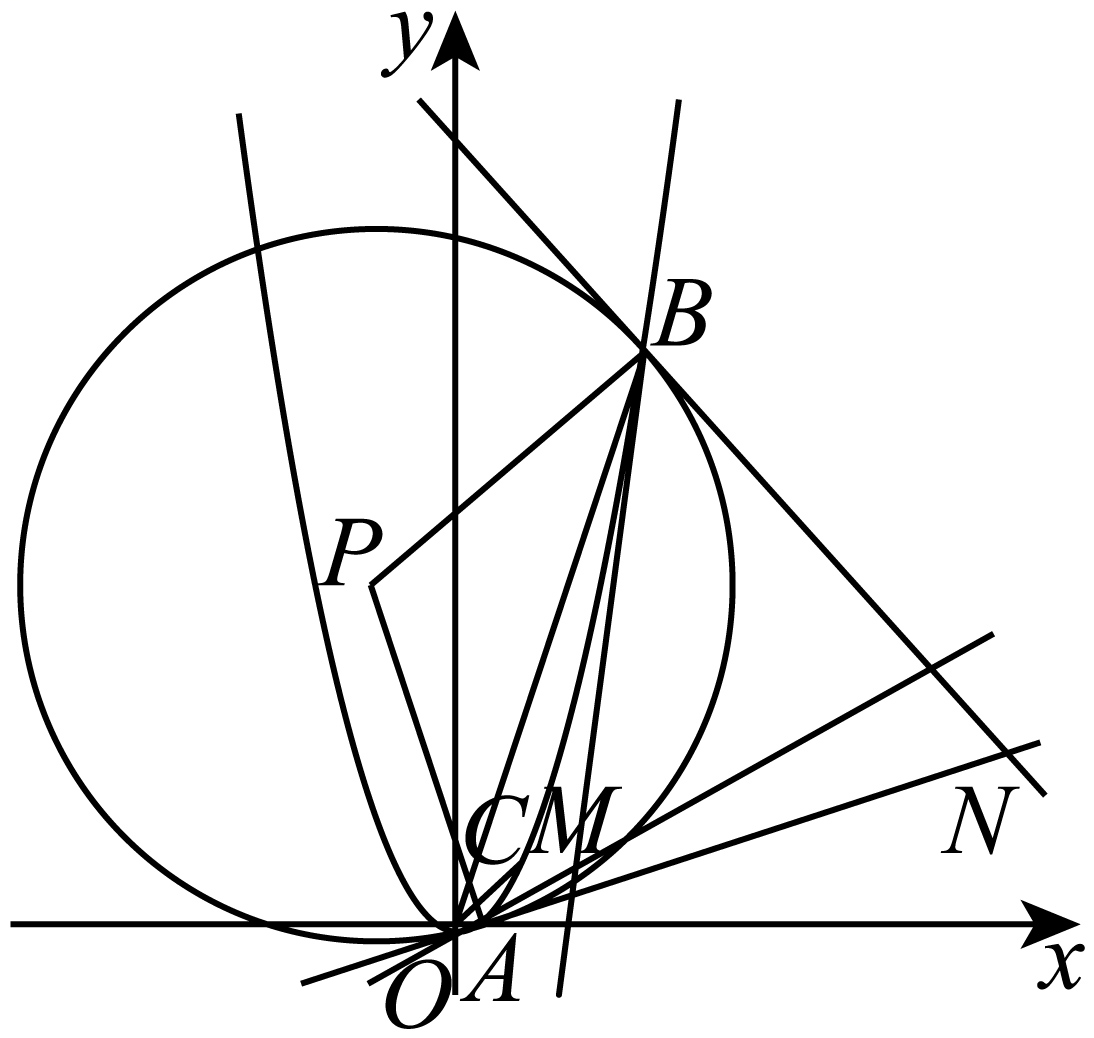
【小问1详解】

由点在抛物线上得，解得，

则的准线方程为.

【小问2详解】

抛物线，



①设，.

由得，则在点处的切线方程为，

又因为，则在点处切线方程为，

同理在点处的切线方程为.

又因为两条切线都经过点，则有，，

则直线的方程为.

由得，由韦达定理得，，

要证，即证，即证.

因为，，，则有，

因为，则，且，，

则有，化简得，此式显然成立.

所以.

②设圆的方程为，

因为点，在圆上，则有，，

因为，则有，，

两式相减得，又，

代入化简得，也即，

由①得，，代入化简得.

由与，

相加得，

又，代入化简得，

则圆的方程为，即，

则圆在点处的切线方程为，

在点处的切线方程为.

设点，因为圆在点与点处的切线都经过点，

则有，，

则直线的方程为，

整理得.

因为过点与的直线有且仅有一条，

又由①知直线的方程为，则有，

解得，，即.

又因为，则直线的斜率，

则直线的方程为，即，所以直线过定点.

【点睛】方法点睛：

若两点满足同一直线方程，则这个方程就是直线的方程，利用导数求抛物线在两处的切线方程，公式法求圆在两处的切线方程，代入切线交点坐标后，都能求出直线的方程，由过点与的直线有且仅有一条，则两方程表示同一直线，这样表示出点坐标，求直线的方程，由方程判断所过定点．