

2024 年安徽省示范高中皖北协作区第 26 届高三联考

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. D 2. B 3. B 4. C 5. A 6. C
7. A 8. D

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 每小题全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. AD 10. CD 11. ABD

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 240 13. -250 14. 3

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 解析 (I) 在 $\triangle ABD$ 中, $\because AB = AD = 4, A = \frac{2\pi}{3}, \therefore \angle ADB = \frac{\pi}{6}$,

$$\therefore BD = 2AD \cos \angle ADB = 2 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理可得 $\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin C}$,

$$\therefore \sin \angle BDC = \frac{BC \sin C}{BD} = \frac{6 \sin \frac{\pi}{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{4}. \quad \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

(II) 在 $\triangle ABD, \triangle CBD$ 中,由余弦定理可得

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos A = 32 - 32 \cos A, \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

$$BD^2 = CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD \cos C = 6^2 + 2^2 - 2 \times 6 \times 2 \times \cos C = 40 - 24 \cos C, \quad \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\therefore 32 - 32 \cos A = 40 - 24 \cos C, \text{ 即 } 4 \cos A - 3 \cos C = -1. \quad \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{又因为 } \cos A = 3 \cos C, \text{ 所以 } \cos A = -\frac{1}{3}, \cos C = -\frac{1}{9}. \quad \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin C = \frac{4\sqrt{5}}{9}, \quad \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

$$\text{故 } S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times \frac{4\sqrt{5}}{9} = \frac{8\sqrt{5} + 16\sqrt{2}}{3}. \quad \dots\dots\dots (13 \text{ 分})$$

16. 解析 (I) 如图,取 AB, CD 的中点 M, N ,连接 GM, MN, HN ,则 $GM \perp$ 平面 $ABCD, HN \perp$ 平面 $ABCD$.

$$\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$,所以 $ED \parallel HN$,

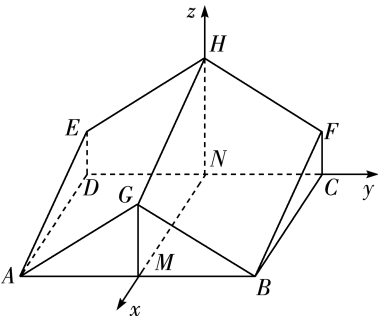
又 $MN \parallel AD, AD \cap DE = D, MN \cap HN = N$,所以平面 $ADE \parallel$ 平面 $GMNH$,

又平面 $AEHG$ 分别交平面 ADE 和平面 $GMNH$ 于 AE, GH ,

$$\text{所以 } AE \parallel GH. \text{ ①} \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

易知 $GM \parallel HN$,又 $AB \parallel CD, AB \cap GM = M, CD \cap HN = N$,所以平面 $ABG \parallel$ 平面 $CDEHF$,

又平面 $AEHG$ 分别交平面 ABG 和平面 $CDEHF$ 于 AG, EH ,
 所以 $AG \parallel EH$. ②..... (4 分)
 由①②知四边形 $AGHE$ 为平行四边形, 所以 $GH = AE$.
 因为 $AE = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$,
 所以 $GH = \sqrt{17}$ (5 分)
 在 $\text{Rt}\triangle AMG$ 中, $GM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,
 在直角梯形 $GMNH$ 中, $HN = 3 + \sqrt{17 - 4^2} = 4$.
 已知 $HN \perp$ 平面 $ABCD$,
 所以点 H 到平面 $ABCD$ 的距离为 4. (7 分)



(II) 以 N 为坐标原点, 直线 NM, NC, NH 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,
 则 $E(0, -4, 1), F(0, 4, 1), G(4, 0, 3), H(0, 0, 4), \overrightarrow{HE} = (0, -4, -3), \overrightarrow{HF} = (0, 4, -3), \overrightarrow{HG} = (4, 0, -1)$.
 (9 分)

设平面 $BFHG$ 的法向量是 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,
 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{HG} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{HF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4x - z = 0, \\ 4y - 3z = 0, \end{cases}$ 令 $z = 4$, 可得 $\mathbf{n} = (1, 3, 4)$ (11 分)

设平面 $AGHE$ 的法向量是 $\mathbf{m} = (a, b, c)$,
 则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{HG} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{HE} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4a - c = 0, \\ -4b - 3c = 0, \end{cases}$ 令 $c = 4$, 可得 $\mathbf{m} = (1, -3, 4)$ (13 分)

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1 - 9 + 16}{\sqrt{1 + 9 + 16} \sqrt{1 + 9 + 16}} = \frac{4}{13}$,
 所以平面 $BFHG$ 与平面 $AGHE$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{4}{13}$ (15 分)

17. 解析 (I) 设双曲线 E 的半焦距为 $c (c > 0)$.

$\because S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| = 3$,
 $\therefore |PF_1| |PF_2| = 6$ (2 分)
 由题可知 $|PF_1| - |PF_2| = 2a, |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4c^2$,
 $\therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| |PF_2| = 4a^2$, 即 $4c^2 - 12 = 4a^2, \therefore b^2 = 3$ (5 分)
 又 $\frac{c}{a} = 2, \therefore a^2 = 1$ (6 分)

故 E 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ (7 分)

(Ⅱ)由题可知 $F_2(2,0), A(-1,0), B(1,0)$, 且直线 MN 的斜率不为 0, 设直线 MN 的方程为 $x = ty + 2$ ($-\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\sqrt{3}}{3}$), $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ (8 分)

将方程 $x = ty + 2$ 和 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 联立, 得 $(3t^2 - 1)y^2 + 12ty + 9 = 0$, (9 分)

$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{12t}{3t^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{9}{3t^2 - 1}$ (10 分)

$\therefore k_{AM} = \frac{y_1}{x_1 + 1}, k_{BN} = \frac{y_2}{x_2 - 1}$, (11 分)

$\therefore \frac{k_{AM}}{k_{BN}} = \frac{y_1(x_2 - 1)}{y_2(x_1 + 1)} = \frac{y_1(ty_2 + 1)}{y_2(ty_1 + 3)} = \frac{ty_1 y_2 + y_1}{ty_1 y_2 + 3y_2} = \frac{\frac{-3t}{3t^2 - 1} - y_2}{\frac{9t}{3t^2 - 1} + 3y_2} = -\frac{1}{3}$,

$\therefore k_{BN} = -3k_{AM}$, (13 分)

$\therefore k_{AM}^2 + \frac{2}{3}k_{BN} = (k_{AM} - 1)^2 - 1$.

\therefore 直线 AM 与 E 的右支有交点, $\therefore -\sqrt{3} < k_{AM} < \sqrt{3}$,

\therefore 当 $k_{AM} = 1, k_{BN} = -3$ 时, $k_{AM}^2 + \frac{2}{3}k_{BN}$ 取得最小值, 且最小值为 -1 (15 分)

18. 解析 (Ⅰ)前 3 次的得分分别是 20(对), 40(对), 10(错), 或 10(错), 20(对), 40(对), (1 分)

所以所求概率是 $2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$ (4 分)

(Ⅱ)(ⅰ)甲第 1 次答题得 20 分、10 分的概率均为 $\frac{1}{2}$, 则 $E(X_1) = 20 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{2} = 15$ (6 分)

甲第 2 次答题得 40 分、20 分、10 分的概率分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$,

则 $E(X_2) = 40 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{4} + 10 \times \frac{1}{2} = 20$ (8 分)

甲第 3 次答题得 80 分、40 分、20 分、10 分的概率分别为 $\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$,

则 $E(X_3) = 80 \times \frac{1}{8} + 40 \times \frac{1}{8} + 20 \times \frac{1}{4} + 10 \times \frac{1}{2} = 25$ (10 分)

当 $i \geq 2$ 时, 因为甲第 $i - 1$ 次答题所得分数 X_{i-1} 的数学期望为 $E(X_{i-1})$,

所以第 i 次答对题所得分数为 $2E(X_{i-1})$, 答错题所得分数为 10 分, 其概率均为 $\frac{1}{2}$,

所以 $E(X_i) = 2E(X_{i-1}) \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{2} = E(X_{i-1}) + 5$,

故猜想: $E(X_i) = E(X_{i-1}) + 5, i \geq 2$ (12 分)

(ⅱ)由(ⅰ)知数列 $\{E(X_i)\}$ 是以 15 为首项, 5 为公差的等差数列,

根据等差数列的求和公式, 可得 $\sum_{i=1}^n E(X_i) = 15n + \frac{n(n-1)}{2} \times 5 = \frac{5n^2 + 25n}{2}$ (14 分)

当 $n = 9$ 时, $\sum_{i=1}^9 E(X_i) = 315 < 320$, 当 $n = 10$ 时, $\sum_{i=1}^{10} E(X_i) = 375 > 320$,

所以 n 的最小值为 10. (17 分)

19. 解析 (I) 由题可知, 切点为 $(0, -\frac{5}{4})$, 切线的斜率为 -1 , $f'(x) = (x + \frac{1-a}{2})e^{2x} - be^x$, (2 分)

所以 $\begin{cases} -\frac{a}{4} - b = -\frac{5}{4}, \\ \frac{1-a}{2} - b = -1, \end{cases}$ (3 分)

解得 $a = 1, b = 1$, (4 分)

所以 $f(x) = \frac{1}{4}(2x - 1)e^{2x} - e^x$ (5 分)

(II) 要证明 $\forall x \in (0, +\infty), f(x) > 2\ln x - 2$, 即证明 $\forall x \in (0, +\infty), \frac{1}{4}(2x - 1)e^{2x} - e^x - 2\ln x + 2 > 0$.

令函数 $F(x) = \frac{1}{4}(2x - 1)e^{2x} - e^x - 2\ln x + 2$, 则 $F'(x) = xe^{2x} - e^x - \frac{2}{x} = (e^x - \frac{2}{x})(xe^x + 1), x > 0$.
..... (7 分)

当 $x > 0$ 时, $xe^x + 1 > 0$,

设函数 $g(x) = e^x - \frac{2}{x} (x > 0)$,

则 $g'(x) = e^x + \frac{2}{x^2} > 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增. (9 分)

又 $g(\frac{4}{5}) = e^{\frac{4}{5}} - \frac{5}{2} < 0, g(1) = e - 2 > 0$,

所以存在唯一的 $x_0 \in (\frac{4}{5}, 1)$, 使得 $g(x_0) = 0$,

即 $e^{x_0} - \frac{2}{x_0} = 0$, 所以 $x_0 = \ln 2 - \ln x_0, \ln x_0 = \ln 2 - x_0$ (11 分)

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $F'(x) < 0, F(x)$ 单调递减,

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0, F(x)$ 单调递增, (12 分)

所以 $F(x) \geq F(x_0) = \frac{1}{4}(2x_0 - 1)e^{2x_0} - e^{x_0} - 2\ln x_0 + 2$
 $= \frac{1}{4}(2x_0 - 1)\frac{4}{x_0^2} - \frac{2}{x_0} - 2(\ln 2 - x_0) + 2$
 $= \frac{2}{x_0} - \frac{1}{x_0^2} - \frac{2}{x_0} - 2\ln 2 + 2x_0 + 2$
 $= -\frac{1}{x_0^2} + 2x_0 - 2\ln 2 + 2$ (15 分)

设函数 $h(t) = -\frac{1}{t^2} + 2t - 2\ln 2 + 2$,

则当 $\frac{4}{5} < t < 1$ 时, $h'(t) = \frac{2}{t^3} + 2 > 0, h(t)$ 在 $(\frac{4}{5}, 1)$ 单调递增,

所以 $h(t) > h(\frac{4}{5}) = -\frac{25}{16} + \frac{8}{5} - 2\ln 2 + 2 = \frac{3}{80} + 2 - 2\ln 2 > 0$, 原不等式得证. (17 分)