

永州市 2024 年高考第三次模拟考试

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	D	C	C	A	C	B

二、多项选择题

题号	9	10	11
答案	AD	BCD	ACD

三、填空题

12. $\{3\}$ 13. $\frac{7}{8}$ 14. $\frac{1}{16}$

7. 解析：

$$f'(x) = e^x + e^{-x} + \cos x - 1 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} + \cos x - 1 = 1 + \cos x \geq 0.$$

$\therefore f(x)$ 在 R 上单调递增.

令 $g(x) = f(x) - 2$, $g(x)$ 为奇函数,

$\therefore g(x)$ 在 R 上单调递增, $f(x) = g(x) + 2$.

则 $f(\log_{\frac{1}{2}} t) + f(3) > 4$ 化为 $g(\log_{\frac{1}{2}} t) + 2 + g(3) + 2 > 4$.

$$g(\log_{\frac{1}{2}} t) > -g(3) \Leftrightarrow g(\log_{\frac{1}{2}} t) > g(-3) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} t > -3.$$

解得 $0 < t < 8$. $\therefore t \in (0, 8)$.

8. 解析：

如图 $\because \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{F_2A}$, $\therefore \Delta F_1AF_2 \sim \Delta F_1BC$, $|F_1F_2| = 2c$, $|CF_2| = 4c$

设 $|AF_1| = t$, 则 $|BF_1| = 3t$, $|AB| = 2t$

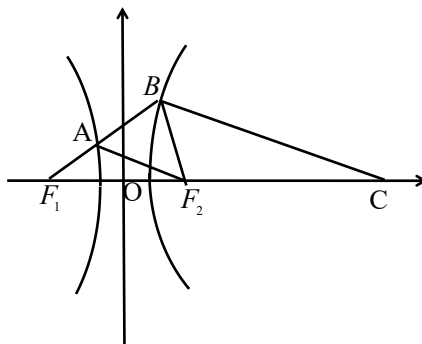
$$BF_2 \text{ 平分 } \angle F_1BC, \therefore \frac{|BC|}{|BF_1|} = \frac{|F_2C|}{|F_1F_2|} = 2,$$

$$|BC| = 2|BF_1| = 6t,$$

$$|AF_2| = \frac{1}{3}|BC| = 2t,$$

由双曲线定义可知 $|AF_2| - |AF_1| = t = 2a$,

$$|BF_1| - |BF_2| = 2a, \therefore |BF_2| = |AF_2| = |AB| = 4a,$$



$\angle ABF_2 = 60^\circ$, 在 $\triangle F_1BF_2$ 中, 由余弦定理知

$$\cos \angle F_1BF_2 = \frac{|F_1B|^2 + |F_2B|^2 - |F_1F_2|^2}{2|F_1B| \cdot |F_2B|} = \frac{(6a)^2 + (4a)^2 - (2c)^2}{2 \cdot 6a \cdot 4a}$$

化简得 $c = \sqrt{7}a$, 由 $a^2 + b^2 = c^2$ 得 $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{42}}{7}$,

$$\therefore \tan \angle POF_2 = \frac{b}{a}, \therefore \sin \angle POF_2 = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{42}}{7}.$$

11. 解析:

当 M 为 BD 中点且 $MN \perp A_1C$ 时, $|MN|$ 长度最短,

由等面积法求得最小值为 $\frac{\sqrt{21}}{14}$. 故 A 对.

半径为 $\frac{\sqrt{13}}{3}$. 故 B 错.

如图, 过 A_1 作 $A_1E \perp BD$, 连接 EC ,

过球心 O 作 $OO_1 \perp EC$

则 O_1 为 EC 的中点, 且 $OO_1 = \frac{1}{2}$,

又球半径为 1, 球与 $\triangle BCD$ 的

一交点为 H , 则 $OH = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又过 O_1 作 $O_1F \perp BC$, $O_1F = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

球与底面 $\triangle BCD$ 的交线如图,

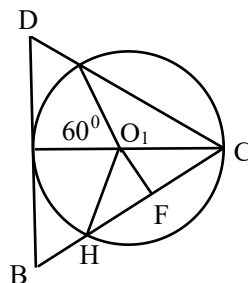
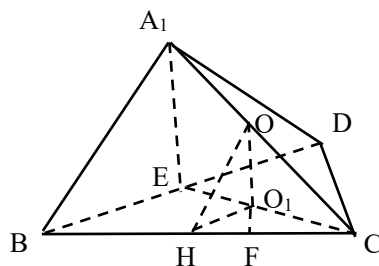
交线长为 $\frac{2}{3}\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$,

故 C 对.

转过的曲面为圆锥的一部分侧面积,

该圆锥母线长为 $\sqrt{2}$, 底面圆半径为 1,

故面积为 $\pi \cdot \sqrt{2}\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$. 故 D 对.



14. 解析:

$$f(x) = 1 - f(1-x) = 1 - 2f\left(\frac{1-x}{7}\right) = 2f\left(\frac{x}{7}\right), \quad \therefore f\left(\frac{1-x}{7}\right) + f\left(\frac{x}{7}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f(0) + f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(0) + f(1) = 1,$$

$$\therefore f(1) - f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{2} + f\left(\frac{1}{7}\right) = 2f\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2}, \quad \therefore \text{当 } x \in \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{2}\right) \text{ 时, } f(x) = \frac{1}{2}, \quad \text{而 } \frac{343}{2024} \in \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2024}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{7}{2024}\right) = \frac{1}{4}f\left(\frac{49}{2024}\right) = \frac{1}{8}f\left(\frac{343}{2024}\right) = \frac{1}{16}.$$

四、解答题

15. (本题满分 13 分)

解:

(1) 依题意可得 2×2 列联表如下:

类别	树苗成活情况		合计
	成活	不成活	
含 M 元素	45	5	50
不含 M 元素	40	10	50
合计	85	15	100

.....2 分

零假设为 H_0 : 该品种树苗成活与 M 元素含量无关联.

.....3 分

根据列联表中的数据,

$$\chi^2 = \frac{100 \times (45 \times 10 - 40 \times 5)^2}{50 \times 50 \times 85 \times 15} = \frac{100}{51} \approx 1.961 < 2.706 = x_{0.10}. \quad \text{.....5 分}$$

根据小概率值 $\alpha = 0.10$ 的独立性检验, 没有充分证据推断 H_0 不成立, 因此可以认为 H_0 成立, 即认为该品种树苗成活与 M 元素含量无关联.

.....6 分

(2) 由题意知, 不成活的树苗共有 15 株, 甲地不成活的树苗有 5 株,

X 的可能取值为 0, 1, 2, 3

.....7 分

$$\text{故 } P(X=0) = \frac{C_5^0 C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91},$$

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91},$$

$$P(X=2)=\frac{C_5^2C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91},$$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3C_{10}^0}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}.$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{24}{91}$	$\frac{45}{91}$	$\frac{20}{91}$	$\frac{2}{91}$

.....11 分（一个概率 1 分）

$$\text{期望 } E(X)=0\times\frac{24}{91}+1\times\frac{45}{91}+2\times\frac{20}{91}+3\times\frac{2}{91}=1$$

（另解：易知 X 服从超几何分布，则 $E(X)=3\times\frac{5}{15}=1$ ）

.....12 分

$$\text{方差 } D(X)=\frac{24}{91}\times(0-1)^2+\frac{45}{91}\times(1-1)^2+\frac{20}{91}\times(2-1)^2+\frac{2}{91}\times(3-1)^2=\frac{4}{7}.$$

.....13 分

16.（本题满分 15 分）

解：

$$(1) \text{ 在 } Rt\triangle BCD \text{ 中, } \tan\angle BDC=\frac{BC}{CD}=\frac{1}{2}, \quad \text{.....1 分}$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } \tan\angle ACB=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle BDC = \angle ACB, \quad \text{.....2 分}$$

$$\therefore \angle BDC + \angle ACD = \angle ACB + \angle ACD = 90^\circ, \quad \text{.....3 分}$$

$$\therefore AC \perp BD, \quad \text{.....4 分}$$

又 $EC \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BD \subset$ 平面 $ABCD$ ，

$$\therefore EC \perp BD,$$

$$\text{又 } AC \cap EC = C, \quad AC \subset \text{平面 } AEC, \quad EC \subset \text{平面 } AEC, \quad \text{.....5 分}$$

$$\therefore BD \perp \text{平面 } AEC, \quad \text{.....6 分}$$

$$\text{又 } AE \subset \text{平面 } AEC, \therefore BD \perp AE. \quad \text{.....7 分（其他方法酌情给分）}$$

(2) 设多面体 $ABCDEF$ 的体积为 V ， $EC = 2BF = 2x$ 。

$$\text{则 } V = V_{A-BCEF} + V_{E-ACD} = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot S_{\text{四边形}BCEF} + \frac{1}{3} \cdot EC \cdot S_{\triangle ACD} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 3x + \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot 4 = \frac{11}{3}$$

求得 $x=1$9 分

如图, 以 C 为坐标原点, CD , CB , CE 所在直线分别为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系,10 分

则 $A(1, 2, 0)$, $E(0, 0, 2)$, $F(0, 2, 1)$, $C(0, 0, 0)$

$\overrightarrow{EF} = (0, 2, -1)$, $\overrightarrow{AF} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 0)$

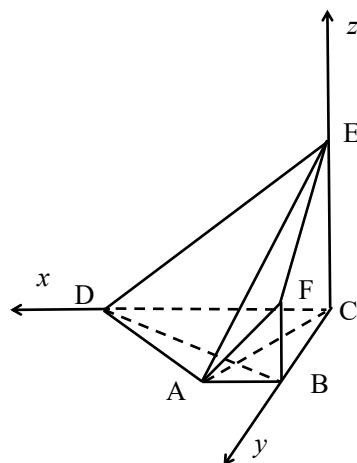
.....11 分

设平面 AEF 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

则有 $\begin{cases} \overrightarrow{AF} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{EF} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -x + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$, 令 $z = 2$, 则 $x = 2$, $y = 1$,

即 $\vec{n} = (2, 1, 2)$ 12 分

设直线 AC 与平面 AEF 所成角为 θ ,



$$\text{那么 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AC}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{4\sqrt{5}}{15}. \quad \text{.....15 分}$$

17. (本题满分 15 分)

解:

$$(1) \text{ 当 } b=1, x > \frac{1}{3} \text{ 时, } f(x) = 3x - 1 - 3 - 3\ln x = 3x - 3\ln x - 4 \quad \text{.....1 分}$$

$$f'(x) = 3 - \frac{3}{x} = \frac{3(x-1)}{x} \quad \text{.....2 分}$$

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 1$,

令 $f'(x) < 0$, 解得 $\frac{1}{3} < x < 1$,4 分

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(\frac{1}{3}, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1) = -1$, 无极大值.7 分

(2) 依题意 $f(x) = |3x-1| - 3b - 3\ln x$, 对任意 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq 0$ 恒成立,

$$\text{即 } 3b \leq |3x-1| - 3\ln x, \quad \text{.....8 分}$$

$$\text{令 } g(x) = |3x-1| - 3\ln x,$$

当 $x \in (0, \frac{1}{3}]$ 时, $g(x) = 1 - 3x - 3\ln x$, $g(x)$ 单调递减.9 分

当 $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$ 时, $g(x) = 3x - 1 - 3\ln x$, $g'(x) = 3 - \frac{3}{x} = \frac{3x-3}{x}$,10 分

令 $g'(x) > 0$, 解得 $x > 1$, 令 $g'(x) < 0$, 解得 $\frac{1}{3} < x < 1$,11 分

综上所述, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增13 分

因此 $g(x)_{\min} = g(1) = 2$, $\therefore 3b \leq 2$, 即 $b \leq \frac{2}{3}$

故 b 的取值范围为 $(-\infty, \frac{2}{3}]$15 分

18. (本题满分 17 分)

解:

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 公比的为 q , 数列 $\{b_n\}$ 公差的为 d

则由 $a_8 = 8a_5$, $q^3 = 8 \therefore q = 2$, $\therefore a_n = a_1 q^{n-1} = 2^n$,2 分

$a_4 = b_8 = 16$, 即 $b_8 = 2 + 7d = 16 \therefore d = 2$, $\therefore b_n = 2 + (n-1)2 = 2n$4 分

(2) 设 $d_n = (-1)^{\frac{1}{2}[\sqrt{2}\sin(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4})+1]} \cdot b_n^2$

则 $d_{4n} + d_{4n-1} + d_{4n-2} + d_{4n-3} = b_{4n}^2 + b_{4n-1}^2 - b_{4n-2}^2 - b_{4n-3}^2 = 128n - 48$ 6 分

$\therefore S_{4n} = (d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + \cdots + (d_{4n-3} + d_{4n-2} + d_{4n-1} + d_{4n}) = \frac{n(128n - 48 + 80)}{2}$
 $= n(64n + 16)$ 7 分

$\therefore \frac{S_{4n} \cdot b_{n+2}}{n \cdot a_{n+2}} = \frac{(64n + 16) \cdot 2(n + 2)}{2^{n+2}} = \frac{(32n + 8)(n + 2)}{2^n}$ 8 分

令 $f(n) = \frac{(32n + 8)(n + 2)}{2^n}$,

则 $f(n+1) - f(n) = \frac{(32n + 40)(n + 3)}{2^{n+1}} - \frac{(32n + 8)(2n + 4)}{2^{n+1}}$
 $= \frac{-32n^2 - 8n + 88}{2^{n+1}} = \frac{4(-4n^2 - n + 11)}{2^n}$,

可得 $f(1) < f(2) > f(3) > f(4) > \cdots > f(n)$,

故当 $n=2$ 时, $f(n)$ 最大.11 分

$$\text{且 } f(1)=60, \quad f(5)=\frac{147}{4}, \quad f(6)=25,$$

$$\therefore 25 < t \leq \frac{147}{4}, \text{ 即 } t \text{ 的取值范围为 } (25, \frac{147}{4}]. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

(3) 由 $c_1=1$, $c_n=\frac{n}{n^2-1}=\frac{n}{(n+1)(n-1)} (n \geq 2)$, 则

当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} c_1 c_2 \cdots c_n &= 1 \times \frac{2}{1 \cdot 3} \times \frac{3}{2 \cdot 4} \times \cdots \times \frac{n}{(n-1)(n+1)} = \frac{n}{3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times n \times (n+1)} \\ &= \frac{2n}{(n+1)!} = 2 \left[\frac{n+1-1}{(n+1)!} \right] = 2 \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right] \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分} \end{aligned}$$

当 $n=1$ 时, $c_1=1$ 也满足上式

$$\therefore c_1 c_2 \cdots c_n = 2 \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right] (n \in N^*) \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\therefore c_1 + c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 + \cdots + c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdots c_n$$

$$= 2 \left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right] = 2 - \frac{2}{(n+1)!} < 2$$

故原不等式成立.17 分

19. (本题满分 17 分)

解:

(1) 设 $M(x_0, y_0)$, $N(x, y)$, 则 $\overrightarrow{ON} = (x, y)$, $\overrightarrow{OM} = (x_0, y_0)$.

$$\text{由 } \overrightarrow{ON} = \sqrt{3} \overrightarrow{OM} \text{ 得 } (x, y) = \sqrt{3}(x_0, y_0),$$

$$\text{即 } x_0 = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y_0 = \frac{y}{\sqrt{3}}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

又 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 1$.

$$\text{代入化简得 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\text{所以点 } N \text{ 的轨迹 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 当两条切线的斜率存在时, 设过 $T(x_0, y_0)$ 点的切线为 $y - y_0 = k(x - x_0)$

$$\text{联立} \begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 得 } (1 + 2k^2)x^2 + 4k(y_0 - kx_0)x + 2(y_0 - kx_0)^2 - 2 = 0$$

$$\text{则由判别式 } \Delta = 8[1 + 2k^2 - (y_0 - kx_0)^2] = 0 \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{得 } (x_0^2 - 2)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 - 1 = 0,$$

$$\text{设两条切线的斜率分别为 } k_1, k_2, \text{ 依题意得 } k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0^2 - 1}{x_0^2 - 2} = -1,$$

$$\text{即 } x_0^2 + y_0^2 = 3, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{又点 } T \text{ 在轨迹 } E \text{ 上, } \therefore \frac{x_0^2}{6} + \frac{y_0^2}{3} = 1$$

$$\text{解得 } x_0 = 0, y_0 = \pm\sqrt{3},$$

$$\therefore T(0, \sqrt{3}) \text{ 或 } (0, -\sqrt{3}) \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

当两条切线的斜率有一条不存在时, 结合图像得不合题意. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

综上, 存在满足条件的点 T , 且点 T 的坐标为 $(0, \sqrt{3})$ 或 $(0, -\sqrt{3})$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

(3) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

将 $y = kx + m$ 代入轨迹 E 的方程,

$$\text{可得 } (1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0$$

$$\text{由 } \Delta = 16k^2m^2 - 4(1 + 2k^2)(2m^2 - 6) = 8(6k^2 + 3 - m^2) > 0,$$

$$\text{可得 } m^2 < 3 + 6k^2 \quad \text{①}$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 6}{1 + 2k^2} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{6k^2 + 3 - m^2}}{1 + 2k^2} \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

因为直线 $y = kx + m$ 与 y 轴交点的坐标为 $(0, m)$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \triangle OAB \text{ 的面积 } S_0 &= \frac{1}{2} |m| \cdot |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{6k^2+3-m^2}|m|}{1+2k^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{(6k^2+3-m^2) \cdot m^2}}{1+2k^2} = \sqrt{2} \sqrt{\left(3 - \frac{m^2}{1+2k^2}\right) \cdot \frac{m^2}{1+2k^2}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

将 $y = kx + m$ 代入椭圆 C 的方程可得 $(1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$

由 $\Delta = 8(1+2k^2-m^2) \geq 0$, 可得 $m^2 \leq 1+2k^2$ ②

令 $\frac{m^2}{1+2k^2} = t$, 由①②可知 $0 < t \leq 1$ \dots\dots\dots 15 分

因此 $S_0 = \sqrt{2}\sqrt{(3-t)t} = \sqrt{2}\sqrt{-t^2+3t}$, 故 $S_0 \leq 2$

当且仅当 $t = 1$, 即 $m^2 = 1+2k^2$ 时, S_0 取得最大值 2 \dots\dots\dots 16 分

由题知 $\overrightarrow{OP} = \sqrt{3}\overrightarrow{OM}$, $\therefore \triangle ABP$ 的面积 $S_1 = (\sqrt{3}-1)S_0$, 又易知 $\triangle ABQ$ 面积 $S_2 = 2S_0$

从而四边形 $APBQ$ 的面积 $S = S_1 + S_2 = (\sqrt{3}+1) S_0$,

所以四边形 $APBQ$ 面积的最大值为 $2(\sqrt{3}+1)$. \dots\dots\dots 17 分