**湖北省恩施州高中教育联盟2023-2024学年高二下学期4月期中考试数学试题**

**命题单位:恩施州高中教育联盟 命题人:建始一中 田茸 吴宗涛**

**考试满分:150分 考试用时:120分钟**

**注意事项:**

**1.答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.**

**2.回答选择题时，选出每小题答案后，用****铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.**

**3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.**

**第I卷(选择题)**

**一、单项选择题:本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.**

1. 记复数的共轭复数为，若，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，由复数的运算即可得到，再由复数的模长公式，即可得到结果.

【详解】由可得，

所以.

故选：C

2. 设为两条不同的直线，为两个不同的平面，下列说法正确的是（ ）

A. 若，则

B. 若与所成的角相等，则

C. 若，则

D. 若，则

【答案】D

【解析】

【分析】根据空间中点线面的位置关系，即可结合选项逐一求解.

【详解】对于A，平行于同一平面的两条直线可能平行，也可能异面，故A错误，

对于B，与所成的角相等，则可能异面，可能相交，也可能平行，故B错误，

对于C，，则可能垂直，但也可能平行或者相交或者异面，故C错误，

对于D，，则，D正确，

故选：D

3. 已知双曲线的一条渐近线方程是，则的离心率是（ ）

A.  B.  C. 5 D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据其渐近线方程列出方程，即可求得离心率.

【详解】因双曲线的一条渐近线方程为，

依题意，，则其离心率为

故选：B.

4. 设是等比数列的前项和，若，则（ ）

A.  B.  C. 5 D. 

【答案】A

【解析】

【分析】利用成等比数列求解可得答案.

【详解】，，可得，

可得，，，

则.

故选；A.

5. 已知实数满足，则取值范围是（ ）

A.  B. 

C.  D. 

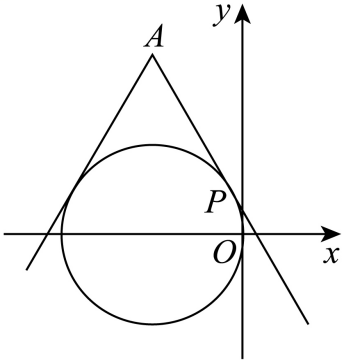
【答案】B

【解析】

【分析】将实数满足的方程理解为动点的轨迹方程，即圆的方程，把看成圆上点与点连线的斜率，考虑直线与圆相切情况，结合图形即得结论.

【详解】由配方得，可得点的轨迹是圆心在,半径为1的圆，

而可看成圆上点与点连线的斜率,如图，



由图可知过点*A*与圆相切的直线斜率一定存在，

设过点的圆的切线方程为：，

由圆心到切线的距离为，解得，

依题意，需使或，即得的取值范围是.

故选：B.

6. 2024年春节期间，有五部电影上映，小李准备和另3名同学一行去随机观看这五部电影中的某一部电影，则小李看电影，且4人中恰有2人看同一部电影的概率为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】首先求出基本事件总数，再求出满足小李看电影，且4人中恰有两人看同一部电影的方案数，最后根据古典概型的概率公式计算可得.

【详解】依题意每位同学均有种选择，则四位同学一共有种方案，

若小李看电影，且4人中恰有两人看同一部电影，

有两人看电影，则有种方案，有一人看电影，则有种方案，

即满足小李看电影，且4人中恰有两人看同一部电影一共有种方案，

所以所求概率.

故选：C.

7. 已知的内角*A*，*B*，*C*所对的边分别为*a*，*b*，*c*，面积为*S*，若，则的形状是（ ）

A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 正三角形 D. 等腰直角三角形

【答案】C

【解析】

【分析】利用正弦定理的边角变换，结合诱导公式与倍角公式求得；利用面积公式与向量数量积的定义求得，从而得解.

【详解】因为，所以，

因，所以，所以，所以；

因为，所以，所以，所以，

所以，所以，

因为，所以，

所以，因为，所以，

所以，则是正三角形.

故选：C.

8. 已知定义域为的函数，其导函数为，且满足，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】由题设不等式和选项的结构，考虑构造函数，求导得其单调性，利用其单调性对自变量进行赋值，即可一一判断选项正误.

【详解】设，则，

因，故得，即在上为减函数.

对于A项，因，则，即，即，故A错误；

对于B项，因，则，即，即得，故B错误；

对于C项，因，则，即，即得，故C错误；

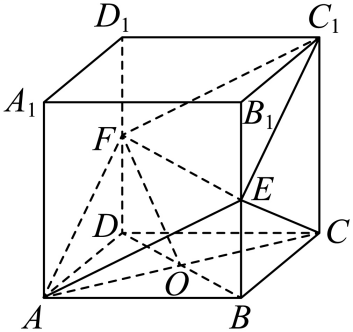
对于D项，因，则，即，即得，故D正确.

故选：D.

【点睛】思路点睛：本题解题思路就是要针对题设中不等式的结构特征（一般同时包含），结合选项特点探求构造的函数式，利用其单调性即可一一判断选项正误.

**二、多项选择题:本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.**

9. 如图，在棱长为2的正方体中，分别为的中点，则（ ）



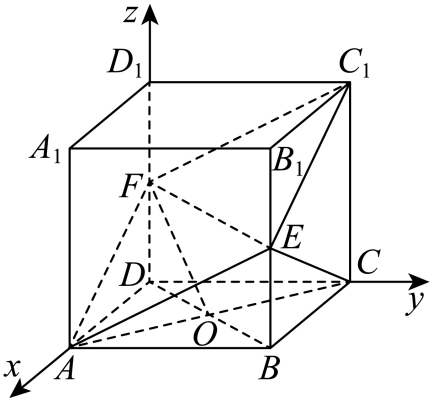
A.  B. *CE*与*OF*所成角的余弦值为

C. 四点共面 D. 的面积为

【答案】AC

【解析】

【分析】先根据正方体结构建系，写出相关点和向量的坐标，利用向量垂直的坐标式计算判断A项，利用空间向量的夹角公式计算判断B项，利用空间向量共面定理判断C项，利用三角形面积公式判断D项即得.

【详解】

如图，以点为坐标原点，为轴的正方向，建立空间直角坐标系.

对于A项，因,则,

即，故A项正确；

对于B项，因，则,

设*CE*与*OF*所成角为，则，故B项错误；

对于C项，因,则,

易得，即为共面向量，故四点共面，即C项正确；

对于D项，因，则，记，

则，故，

故的面积为，故D项错误.

故选：AC.

10. 已知圆，圆，动圆与圆外切于点，与圆内切于点，圆心的轨迹记为曲线，则（ ）

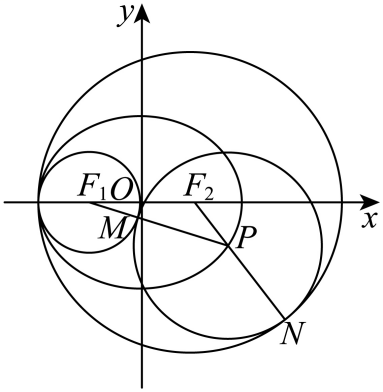
A. 的方程为 B. 的最小值为

C.  D. 曲线在点处的切线方程为

【答案】BCD

【解析】

【分析】A.利用两圆的内切、外切的充要条件，由椭圆定义即可得的方程； B.由即求的最大值，利用椭圆性质可得； C.运用向量数量积的坐标公式计算即得； D.将选项直线与椭圆方程联立，验证消元后的方程判别式为零即可.

【详解】

如图，对于A项，设动圆的半径为，由条件得则，且不重合，

故点的轨迹为以为两焦点得椭圆，（去掉重合的点），则曲线的方程为，故A错误；

对于B项，由图知点在椭圆上运动，当且仅当点运动到椭圆短轴顶点时，最大，

此时，则最大为，即的最小值为，故B项正确；

对于C项，，易得，

故当时，取得最大值，故C项正确；

对于D项，由 ，消去，整理得：

则



因在椭圆上，，即，代入上式得，

故是过椭圆上一点处的切线方程，即D项正确.

故选：BCD.

11. 已知函数，则下列结论正确的是（ ）

A. 当时，在定义域上恒成立

B. 若经过原点的直线与的图象相切于点，则

C. 若在区间上单调递减，则的取值范围为

D. 若有两个极值点，则的取值范围为

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于A，利用导数求得函数的最大值为0，可得结论正确；对于B，依题求出函数在点处的切线方程，代入原点即得；对于C，利用在上恒成立即可求得；对于D，利用在上恒有两不等实根即可求得.

【详解】对于A项，当时，，

当时，，递增，当时，，递减，

则时，取得极大值，即最大值0，故在定义域上恒成立，即A项正确；

对于B项，由可得，即在处的切线斜率为，

切线方程为：，代入原点坐标，得，解得，故B项错误；

对于C项，由求导得，，

因在区间上单调递减，则有在区间上恒成立.

设，则需使即 ，解得，故C项正确；

对于D项，因有两个极值点，则有两个正实根，

需使解得，此时，不妨设，则，

当或时，，递增，当时，，递减，

故在时取极大值，在时取极小值，符合题意，故D项正确.

故选：ACD.

【点睛】思路点睛：本题主要考查利用导数解决不等式恒成立和极值点问题，属于难题.

解决含参数的一元二次不等式恒成立问题，一般可考虑数形结合或者参变分离法求解；求解函数的极值点存在问题，一般将其转化为导函数方程的根的个数问题或者化归成两函数图象的交点个数问题解决.

**第II卷(非选择题)**

**三、填空题:本题共3小题，每小题5分，共15分.**

12. 已知，则\_\_\_\_\_\_，

【答案】

【解析】

【分析】注意是个常数，对进行求导，再代入即可得解.

【详解】因为，

所以，

所以，则.

故答案为：.

13. 已知函数的最小正周期为，若，且是的一个极值点，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】将化简为，表示出最小正周期为，由，求出的范围，再由是的一个极值点，求出符合范围的的值.

【详解】

所以的最小正周期为，

于是，解得，

因为是的一个极值点，则，

解得，所以时，

故答案为：.

14. 已知三棱锥的四个顶点都在球的球面上，，，是边长为的等边三角形，的面积为，则球的体积为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】取的中点，连接，，根据题干所给条件求出，再由勾股定理求出、，即可得到，从而得到平面， 将三棱锥补成正三棱柱，三棱锥的外接球即正三棱柱的外接球，利用勾股定理求出外接球的半径，即可求出外接球的体积.

【详解】解：取的中点，连接，，，，的面积为，

则，解得，，，

又，，

所以，即，又，，平面，

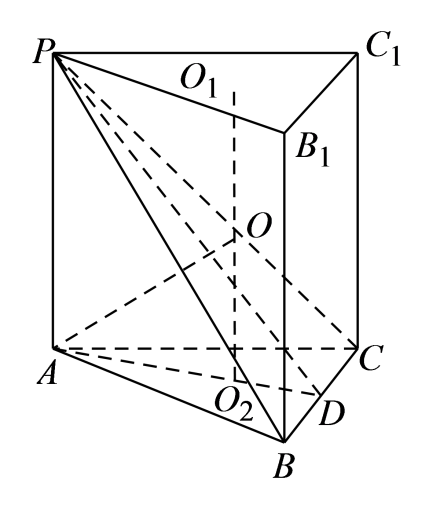
可得平面，

将三棱锥补成正三棱柱，三棱锥的外接球即正三棱柱的外接球，

外接球的球心为上、下底面的外接圆圆心的连线的中点，连接，，

设外接球的半径为，下底面外接圆的半径为，，则，所以，

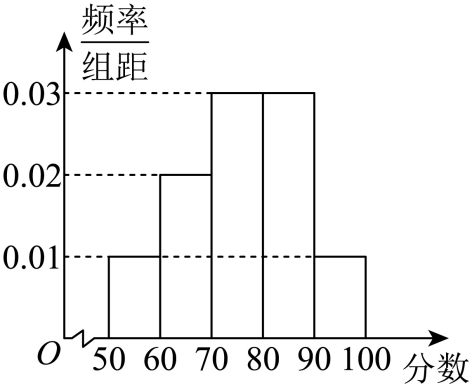
所求外接球的体积为；



故答案为：

**四、解答题:本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.**

15. 为了营造浓厚的读书氛围，激发学生的阅读兴趣，净化学生的精神世界，赤峰市教育局组织了书香校园知识大赛，全市共有名学生参加知识大赛初赛，所有学生的成绩均在区间内，组委会将初赛成绩分成组：加以统计，得到如图所示的频率分布直方图.



（1）试估计这名学生初赛成绩的平均数及中位数（同一组的数据以该组区间的中间值作为代表）；（中位数精确到0.01）

（2）组委会在成绩为的学生中用分层抽样的方法随机抽取人，然后再从抽取的人中任选取人进行调查，求选取的人中恰有人成绩在内的概率.

【答案】（1）平均数76，中位数约为76.67.

（2）．

【解析】

【分析】（1）利用频率分布直方图，根据平均数和中位数的计算方法即可求得答案；

（2）确定成绩为的学生中成绩在和内的人数比例，即可确定抽查的5人中各组抽的人数，列举出抽取的人中任选取人的所有可能情况，再列出选取的人中恰有人成绩在内的情况，根据古典概型的概率公式即可求得答案.

【小问1详解】

，

设中位数为，因为前组的频率之和为，

而前2组的频率之和为，所以，

由，

解得：，

故可估计这500名学生初赛成绩的中位数约为；

【小问2详解】

根据分层抽样，由频率分布直方图知成绩在和内的人数比例为，

所以抽取的5人中，成绩在内的有人，记为，；

成绩在内的有人，记为，，，

从5人中任意选取2人，有，，，，，，，，，，共10种可能；

其中选取的2人中恰有1人成绩在区间内的有，，，，，，共6种可能；

故所求的概率为．

16. 已知等差数列的前项和为，现给出下列三个条件：①；②；③.请你从这三个条件中任选两个解答下列问题.

（1）求的通项公式；

（2）若数列满足，设数列的前项和为，求证：.

注：如果选择多个条件分别进行解答，按第一个解答进行计分.

【答案】（1）条件选择见解析，

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）设等差数列的公差为，先将条件①条件②条件③化简，再分选①②，选①③，选②③求解；

（2）由，且，利用累加法求得，进而得到，然后利用裂项相消法求解.

【小问1详解】

解：设等差数列的公差为，由条件①得，

，即.

由条件②得，，即.

由条件③得，，可得，即.

若选①②，则解得所以；

若选①③，则解得则；

若选②③，则解得则；

【小问2详解】

证明：由，且，

当时，则，

，

又也满足，故对任意的，有.

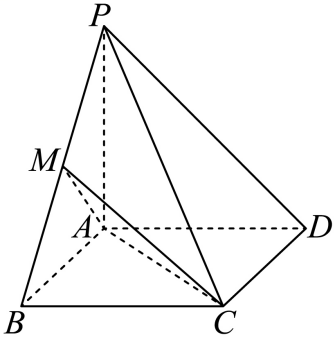
则，

所以，

由于是单调递增，所以.

综上，.

17. 如图，在四棱锥中，底面是正方形，平面平面，



（1）证明：平面平面；

（2）若是的中点，平面与平面所成锐二面角的余弦值为，求直线与平面所成角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）根据面面垂直的性质可得线面垂直，进而根据线线垂直证明线面垂直，即可得面面垂直，

（2）建立空间直角坐标系，利用向量的夹角即可求解长度，进而利用线面角的几何法，结合三角形的边角关系即可求解.

【小问1详解】

如图，过点作于点，

因为平面平面，平面平面，平面，

所以平面，因为平面，所以，

因为底面正方形，所以，

又，平面，所以平面，

因为平面，所以平面平面，

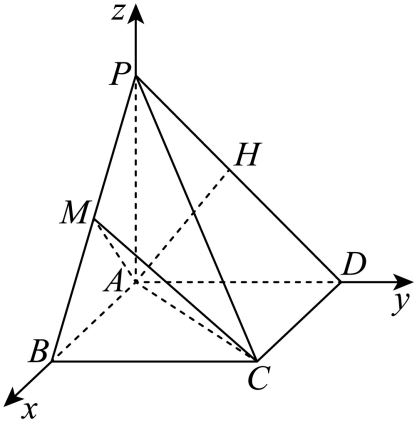
【小问2详解】

由（1）知平面，因为，

所以平面，又，所以两两垂直，

所以以为原点，以所在直线分别为轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

因为底面是正方形，设，



所以，，

则，

设平面的一个法向量为，则得

令，则，所以，

设平面的一个法向量为，则得

令，则，所以，

因为平面与平面所成锐二面角的余弦值为，

所以，解得（负值舍去），

又平面，所以平面，

所以为与平面所成的线面角，

因为，所以，

在中，，

所以直线与平面所成角的余弦值为.

18 已知函数．

（1）若*a*＝1，求函数的单调区间及在*x*＝1处的切线方程；

（2）设函数，若时，恒成立，求实数*a*的取值范围．

【答案】（1）的减区间为，增区间为；切线方程为.

（2）

【解析】

【分析】（1）将*a*＝1代入函数中，求出函数的导数，判断导数的正负，可得函数的单调区间；根据导数的几何意义求得切线方程；

（2）化简，利用导数求出，分类讨论，分别求出，令求解即可.

【小问1详解】

当时，

由，有，

由有，

所以在上单调递减，在上单调递增，

所以的减区间为，增区间为；

又，所以切点为，

切线斜率，

所以切线方程，

即切线方程为.

【小问2详解】

，

，

设，

则

∵，∴，

在上单调递增，

，

①当，即时，

，

在上单调递增，

则，

∴，

故．

②当，即时，

，

，，

即，

当时，，在上单调递减，

当时，，在上单调递增，

则

，

∴，

∴．

由，

令函数，且，

，

在上单调递增，，

∵，

∴．

综上，实数*a*的取值范围是：．

【点睛】导数题常作为压轴题出现，常见的考法：

①利用导数研究含参函数的单调性（或求单调区间），

②求极值或最值

③求切线方程

④通过切线方程求原函数的解析式

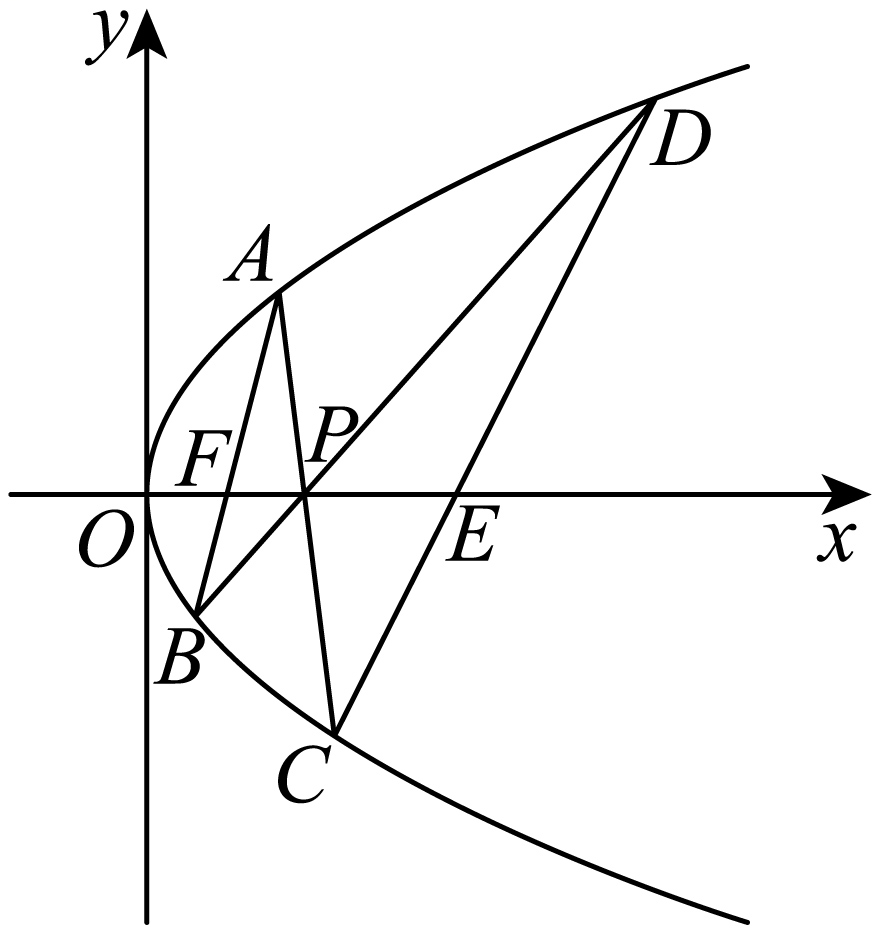
⑤不等式恒（能）成立问题，求参数的取值范围

⑥证明不等式

⑦已知函数的零点个数求参数的取值范围

解决问题思路：对函数求导利用函数的单调性进行求解；构造新函数对新函数，然后利用函数导数性质解决.

19. 已知抛物线与椭圆有公共的焦点.



（1）求抛物线的标准方程.

（2）如图，过抛物线的焦点的直线与抛物线交于点，点，直线*AP*，*BP*分别与抛物线交于点.证明：

①直线*CD*过定点；

②与的面积之比为定值.

【答案】（1）

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据抛物线的焦点坐标即可求解；

（2）①设直线方程，与抛物线联立，韦达定理找到坐标关系，表示出直线方程，即可求出定点；

②利用三角形的面积公式结合二次函数的基本性质可求得与的面积之比.

【小问1详解】

由题意得抛物线的焦点坐标为，

所以抛物线的方程为；

【小问2详解】

①若直线与轴重合，则直线与抛物线只有一个交点，不合乎题意，

同理可知，直线也不与轴重合，

设，，直线的方程为，

联立得，

，所以，，

设直线的方程为，

联立得，

所以，所以，，

所以，同理可得，

所以，

所以直线的方程为，

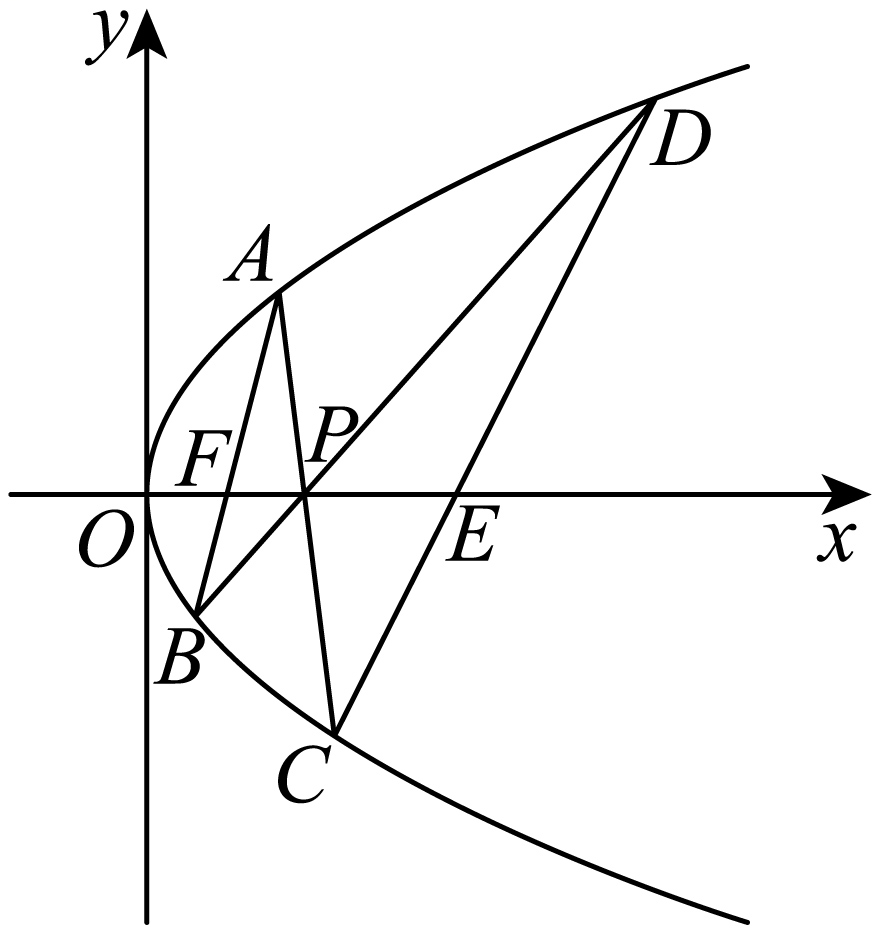
由对称性知定点在轴上，

令，

，

所以直线过定点；

②记定点，



，

，

所以与的面积之比为定值.

【点睛】方法点睛：求解直线过定点问题常用方法如下：

（1）“特殊探路，一般证明”：即先通过特殊情况确定定点，再转化为有方向、有目的的一般性证明；

（2）“一般推理，特殊求解”：即设出定点坐标，根据题设条件选择参数，建立一个直线系或曲线的方程，再根据参数的任意性得到一个关于定点坐标的方程组，以这个方程组的解为坐标的点即为所求点；（3）求证直线过定点，常利用直线的点斜式方程或截距式来证明.