**2024届高三年级TOP二十名校冲刺一**

**数学**

**全卷满分150分，考试时间120分钟**

**注意事项：**

**1．答卷前，考生务必将自己的姓名､准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置．**

**2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．**

**3．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．**

**4．本卷命题范围：高考范围．**

**一､选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 若复数满足，则（ ）

A  B.  C.  D. 

2. 已知集合，则中元素的个数为（ ）

A. 9 B. 8 C. 5 D. 4

3. 若，则“”是“”的（ ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 函数与直线相切于点，则点的横坐标为（ ）

A.  B. 1 C. 2 D. 

5. 设，则（ ）

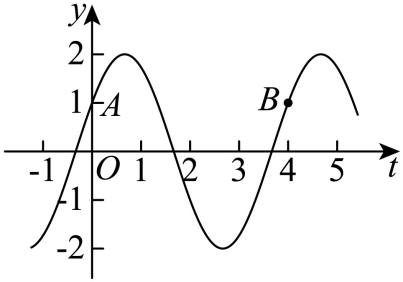
A.  B. 

C.  D. 

6. 在中，若，则的形状是（ ）

A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等腰或直角三角形

7. 如图是某质点作简谐运动的部分图象，位移（单位：）与时间（单位：）之间的函数关系式是，其中，振幅为2，则前3秒该质点走过的路程为（ ）



A.  B.  C.  D. 

8. 已知点在水平面内，从出发的三条两两垂直的线段位于的同侧，若到的距离分别为，则的值为（ ）

A. 1 B.  C.  D. 2

**二､多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．**

9. 某研究机构为了探究过量饮酒与患疾病真否有关，调查了400人，得到如图所示的列联表，其中，则（ ）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 患疾病 | 不患疾病 | 合计 |
| 过量饮酒 |  |  |  |
| 不过量饮酒 |  |  |  |
| 合计 |  |  | 400 |

参考公式与临界值表：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.100 | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|  | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

A. 任意一人不患疾病的概率为0.9

B. 任意一人不过量饮酒的概率为

C. 任意一人在不过量饮酒条件下不患疾病的概率为

D. 依据小概率值的独立性检验，认为过量饮酒与患疾病有关

10. 已知椭圆的左，右焦点分别为，将上所有点的横坐标与纵坐标分别伸长到原来的倍得到椭圆，则下列说法正确的是（ ）

A. 若，则

B. 若的离心率分别为，则

C. 若的周长分别为，则

D. 若的四个顶点构成的四边形面积为，则的离心率为

11. 将圆柱的下底面圆置于球的一个水平截面内，恰好使得与水平截面圆的圆心重合，圆柱的上底面圆的圆周始终与球的内壁相接（球心在圆柱内部）．已知球的半径为3，．若为上底面圆的圆周上任意一点，设与圆柱的下底面所成的角为，圆柱的体积为，则（ ）

A. 可以取到中的任意一个值

B. 

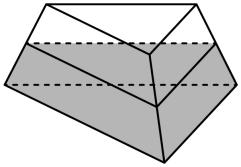
C. 的值可以是任意小的正数

D 

**三､填空题：本题共3小题；每小题5分，共15分．**

12. 若，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

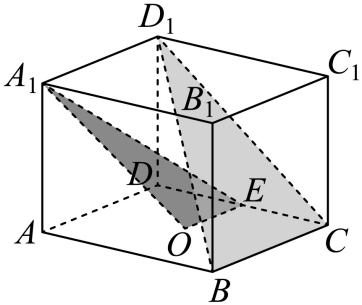
13. 如图是一个水平放置在某地的三棱台型集雨器，已知上､下底的面积分别为和，高为.现在搜集到的雨水平面与上､下底面的距离相等，则该地的降雨量为\_\_\_\_\_\_.（降雨量等于集雨器中积水体积除以集雨器口的面积）



14. 若点在抛物线上运动，点在圆上运动，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

**四､解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出必要的文字说明､证明过程及演算步骤．**

15. 在直四棱柱中，底面为矩形，，分别为底面的中心和的中点，连接．



（1）求证：平面平面；

（2）若，求平面与平面所成角余弦值．

16. 某公司拟从水平相当的普通程序员中篮选出若干高级程序员，方法如下：首轮每位普通程序员被要求设计难度相同的甲､乙､丙､丁四种程序，假设每位普通程序员每种设计合格的概率都为，其中四种设计全部合格直接晋升为高级程序员；至少有两种（包括两种）“不合格”的直接被淘汰，否则被要求进行二轮设计：在三种难度不同的程序中随机抽取两种进行设计，且抽取的两种设计都合格方可晋升为高级程序员．已知每位普通程序员设计合格的概率分别为，同一普通程序员不同的设计相互不影响．

（1）已知设计合格的得分分别为，不合格得0分，若二轮设计中随机抽取到的得分为，求的分布列和数学期望；

（2）求每位普通程序员晋升为高级程序员的概率．

17. 在平面直角坐标系中，点的坐标分别为，以为圆心作一个半径为4的圆，点是圆上一动点，线段的重直平分线与直线相交于点．

（1）求的轨迹的方程；

（2）已知，点是轨迹在第一象限内的一点，为的中点，若直线的斜率为，求点的坐标．

18. 已知函数.

（1）讨论函数的单调性；

（2）当时，求证：.

19. 在等差数列中，已知成等差数列．

（1）求数列的通项公式；

（2）数列是否为等比数列？若是求其前项和，若不是，请说明理由；

（3）设，且，求所有取值．

**2024届高三年级TOP二十名校冲刺一**

**数学**

**全卷满分150分，考试时间120分钟**

**注意事项：**

**1．答卷前，考生务必将自己的姓名､准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置．**

**2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．**

**3．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．**

**4．本卷命题范围：高考范围．**

**一､选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 若复数满足，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】利用复数除法法则计算出答案.

【详解】因为，所以．

故选：C．

2. 已知集合，则中元素的个数为（ ）

A. 9 B. 8 C. 5 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】利用列举法表示出集合*A*，再求出并集即可得解.

【详解】依题意，解不等式，得，，

而，因此，

所以中元素的个数为8．

故选：B

3. 若，则“”是“”的（ ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】构造函数，根据函数单调性得到，故.

【详解】构造函数，则在上单调递增，

所以．

故选：C．

4. 函数与直线相切于点，则点的横坐标为（ ）

A.  B. 1 C. 2 D. 

【答案】B

【解析】

【分析】设出，求导，直线的斜率为，根据导数的几何意义得到方程，求出横坐标

详解】设函数与直线相切于点，

直线的斜率为，

，所以，所以．

故选：B．

5. 设，则（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据指数幂与对数的运算性质，分别求得的取值范围，即可求解.

详解】由，

即，所以．

故选：C．

6. 在中，若，则的形状是（ ）

A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等腰直角三角形 D. 等腰或直角三角形

【答案】D

【解析】

【分析】利用余弦定理将化简为，从而可求解.

【详解】由，得，

化简得，

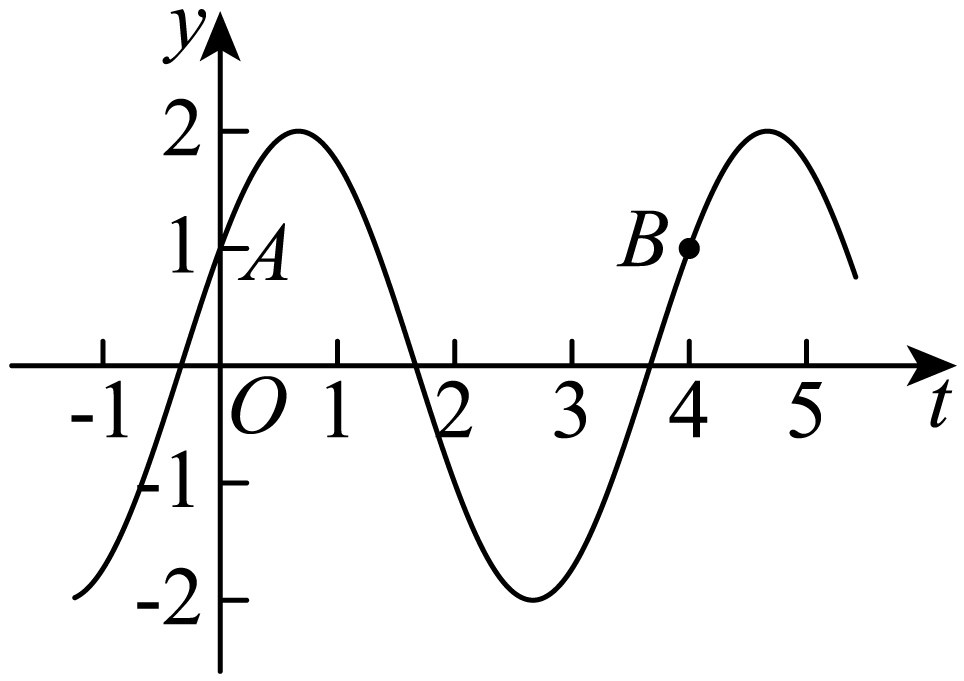
当时，即，则直角三角形；

当时，得，则为等腰三角形；

综上：为等腰或直角三角形，故D正确.

故选：D.

7. 如图是某质点作简谐运动的部分图象，位移（单位：）与时间（单位：）之间的函数关系式是，其中，振幅为2，则前3秒该质点走过的路程为（ ）



A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，求得，分别令、和，求得相应的函数值，进而求得前3秒该质点走过的路程，得到答案.

【详解】由函数的图象，可得，周期为，

可得，所以，

因为在函数图象上，可得，即，

又因为，所以，

因为时，，所以，所以，

令，则，

故函数图像在轴右侧第一条对称轴和第二条对称轴分别为,

令，则；令，则；

令，则，

所以质点在的路程分别，

所以前3秒该质点走过的路程为.

故选：D

8. 已知点在水平面内，从出发的三条两两垂直的线段位于的同侧，若到的距离分别为，则的值为（ ）

A. 1 B.  C.  D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】以为空间的一个基底，由此表示出平面的单位法向量，再利用数量积的运算律求解即得.

【详解】由两两垂直，取空间的一个基底，

设是平面的一个单位法向量，依题意，可使与的夹角都是锐角，

则存在唯一的有序实数组，使得，

显然在方向上的投影向量的长度分别为，

于是，即，则，即，

同理，因此，

而，所以，

因此，

所以．

故选：A

【点睛】关键点点睛：选定空间不共面的三个向量作基向量，并用它们表示出指定的向量，是用向量解决立体几何问题的关键，解题时应结合已知和所求观察图形，联想相关的运算法则和公式等，就近表示所需向量．

**二､多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．**

9. 某研究机构为了探究过量饮酒与患疾病真否有关，调查了400人，得到如图所示的列联表，其中，则（ ）

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 患疾病 | 不患疾病 | 合计 |
| 过量饮酒 |  |  |  |
| 不过量饮酒 |  |  |  |
| 合计 |  |  | 400 |

参考公式与临界值表：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.100 | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|  | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

A. 任意一人不患疾病的概率为0.9

B. 任意一人不过量饮酒的概率为

C. 任意一人在不过量饮酒的条件下不患疾病的概率为

D. 依据小概率值独立性检验，认为过量饮酒与患疾病有关

【答案】ACD

【解析】

【分析】先求出，利用古典概型概率公式求解判断AB，利用条件概率概念求解判断C，求出的观测值，即可判断D.

【详解】由已知得，又，所以.

任意一人不患疾病的概率为，所以A正确；

任意一人不过量饮酒的概率为，所以B错误；

任意一人在不过量饮酒的条件下不患疾病的概率为，所以C正确；

对于D，列联表如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 患疾病 | 不患疾病 | 合计 |
| 过量饮酒 | 30 | 120 | 150 |
| 不过量饮酒 | 10 | 240 | 250 |
| 合计 | 40 | 360 | 400 |

则的观测值，由于，

依据小概率值的独立性检验，认为过量饮酒与患疾病有关，所以D正确.

故选：ACD

10. 已知椭圆的左，右焦点分别为，将上所有点的横坐标与纵坐标分别伸长到原来的倍得到椭圆，则下列说法正确的是（ ）

A. 若，则

B. 若的离心率分别为，则

C. 若的周长分别为，则

D. 若的四个顶点构成的四边形面积为，则的离心率为

【答案】AB

【解析】

【分析】利用糖水不等式判断选项A；根据椭圆离心率的定义式判断选项B；利用相似图形的相似比即可判断出选项C；综合运用椭圆的几何性质和四边形的面积公式判断选项D即可.

【详解】设点为椭圆上任意一点，则由题意知，即，代入椭圆的方程得.所以椭圆的方程为.

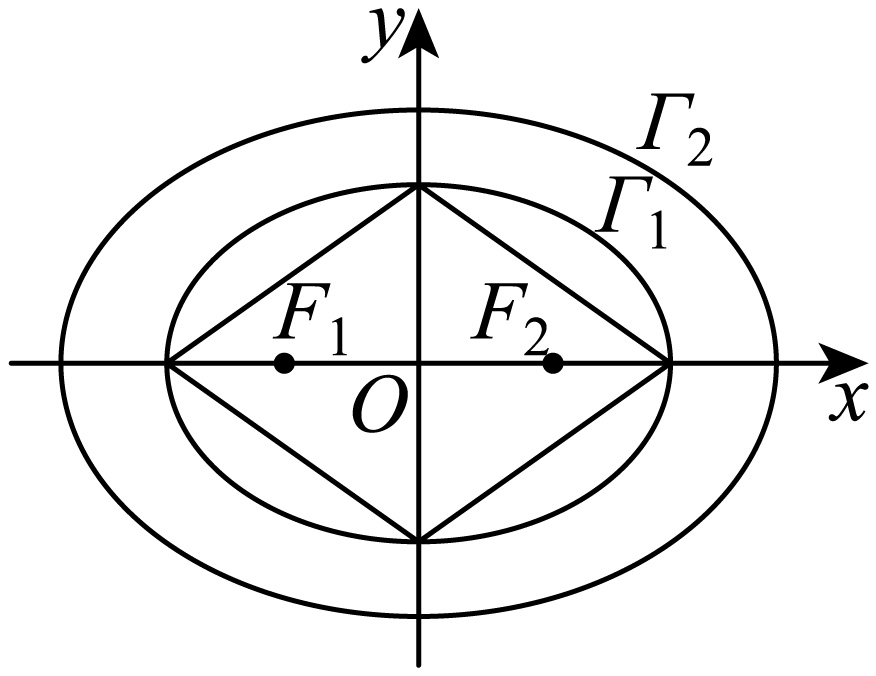
因为，所以，所以正确；

由已知得，，所以正确；

由已知得，，其相似比为，所以，所以，因为，所以错误；

设，因为的四个顶点构成的四边形的面积为，所以，所以，所以，所以，所以(负舍)，所以D错误．

故选：．



11. 将圆柱的下底面圆置于球的一个水平截面内，恰好使得与水平截面圆的圆心重合，圆柱的上底面圆的圆周始终与球的内壁相接（球心在圆柱内部）．已知球的半径为3，．若为上底面圆的圆周上任意一点，设与圆柱的下底面所成的角为，圆柱的体积为，则（ ）

A. 可以取到中的任意一个值

B. 

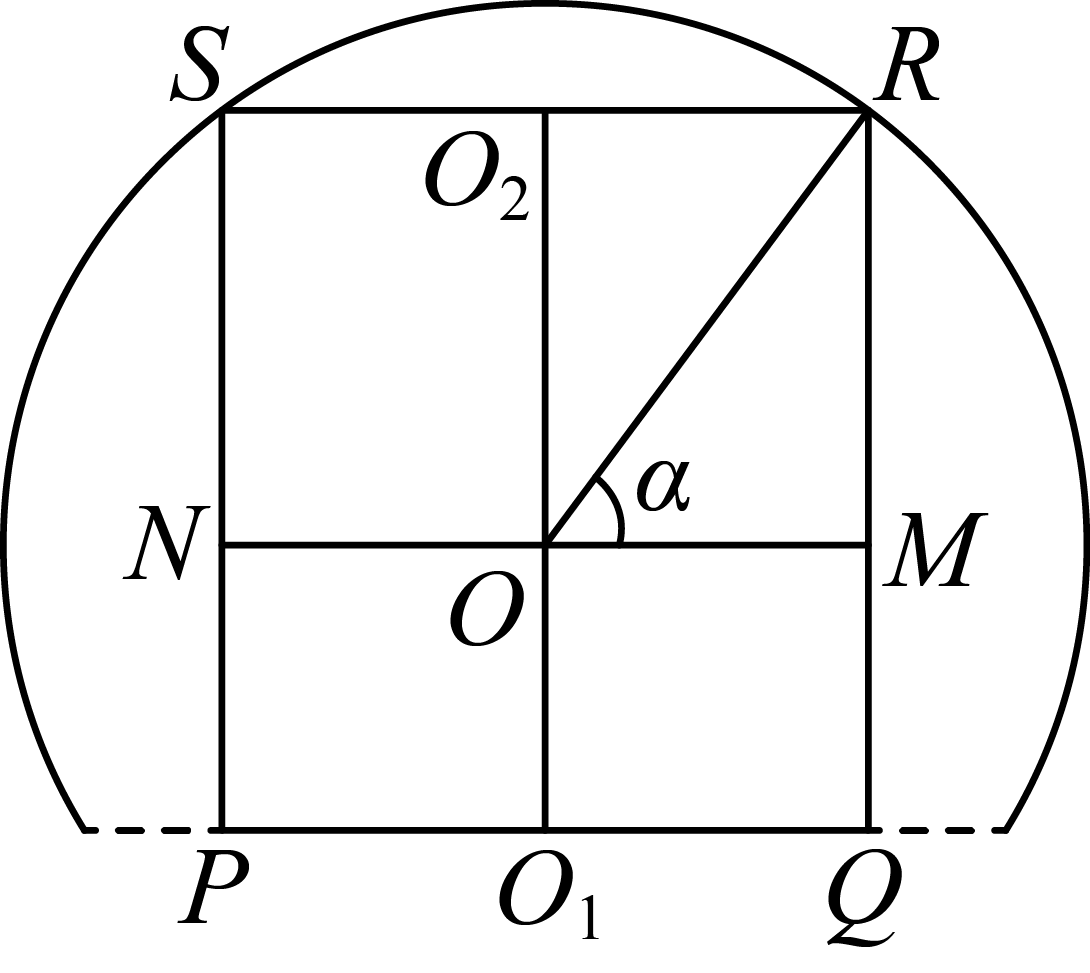
C. 的值可以是任意小的正数

D. 

【答案】BCD

【解析】

【分析】先画出平面图，得到圆柱的底面半径，高为，代入圆柱体积公式求解，再令，利用导数求最值.

【详解】

过*R*作圆柱的轴截面，过*O*作交圆柱轴截面的边于*M，N*，

由与圆柱的下底面所成的角为，则，所以，

即，故B正确；

当点*P，Q*均在球面上时，角取得最小值，此时，所以，

所以，故A错误；

令，所以，

所以，另，

解得两根，

所以，

所以在时单调递减，

所以，，故CD正确；

故选：BCD．

【点睛】关键点睛：本题主要考查运用导数求最值的方法，难度较大，解决问题的关键在于先画出平面图，得到圆柱的底面半径，高为，代入圆柱体积公式求解，再令，利用导数求最值.

**三､填空题：本题共3小题；每小题5分，共15分．**

12. 若，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

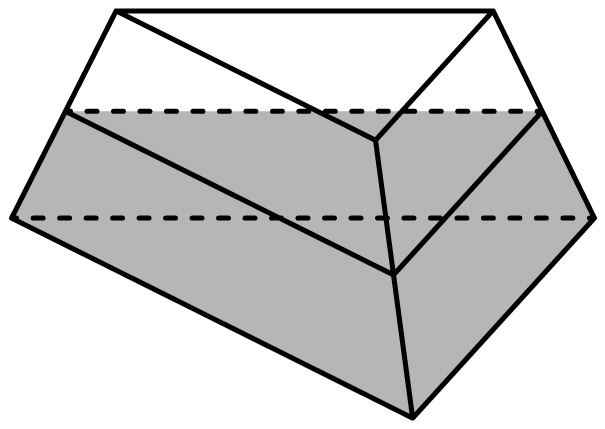
【解析】

【分析】利用向量夹角余弦公式进行求解.

【详解】．

故答案为：

13. 如图是一个水平放置在某地的三棱台型集雨器，已知上､下底的面积分别为和，高为.现在搜集到的雨水平面与上､下底面的距离相等，则该地的降雨量为\_\_\_\_\_\_.（降雨量等于集雨器中积水体积除以集雨器口的面积）



【答案】

【解析】

【分析】将三棱台补成三棱锥，求得三棱锥的体积为，再设和的体积分别为，结合则，求得和，根据，即可求解.

【详解】如图所示，将三棱台补成三棱锥，设三棱锥的高为，

则，解得，所以三棱锥的体积为，

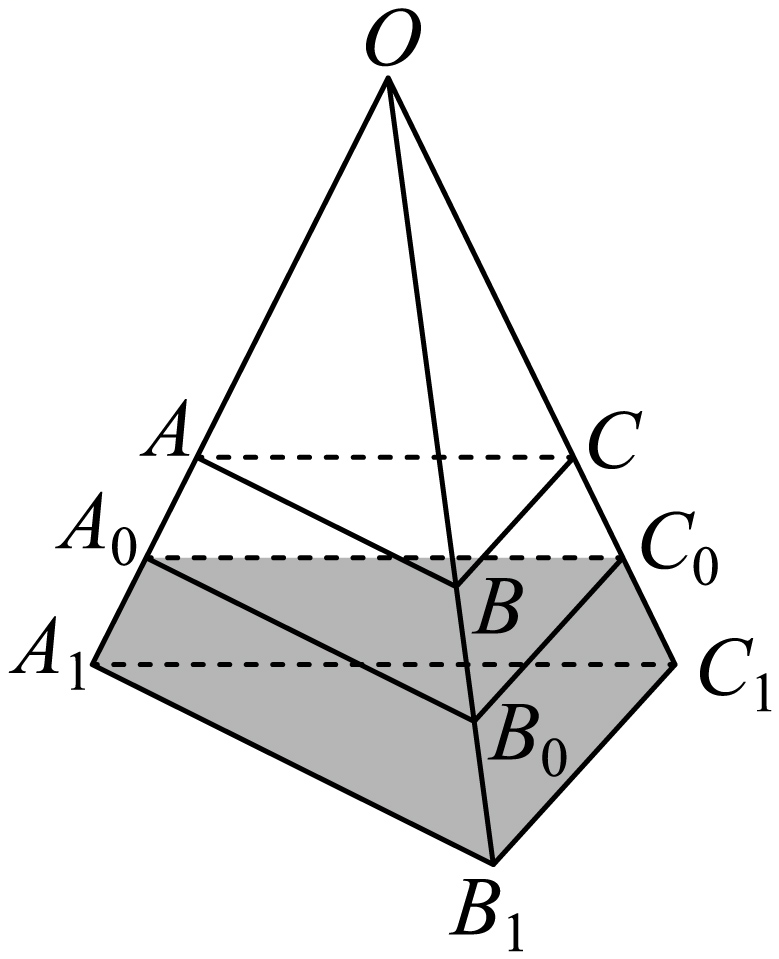
再设的体积分别为，

则，所以，所以，

同理，所以，

所以该地的降雨量为.

故答案为：.



14. 若点在抛物线上运动，点在圆上运动，，则的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】2

【解析】

【分析】设，根据抛物线焦半径得到，利用两点间距离公式得到，根据得到，变形得到，利用基本不等式求出最小值.

【详解】抛物线的焦点的坐标为，准线方程为，

为圆的圆心，圆的半径为，

设点，则由抛物线的定义得，

，

由三角形三边关系得到，当且仅当共线时，等号成立，

所以，

令，则，

所以，

当且仅当，即时等号成立，故的最小值为2．

故答案为：2

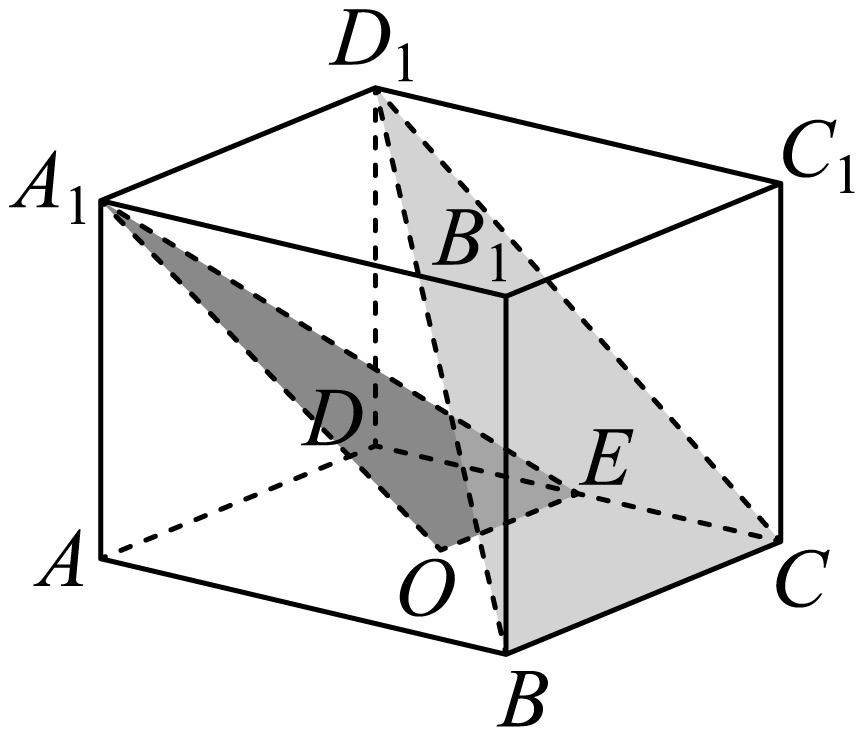
【点睛】圆锥曲线中最值或范围问题的常见解法：

（1）几何法，若题目的条件和结论能明显体现几何特征和意义，则考虑利用几何法来解决；

（2）代数法，若题目的条件和结论能体现某种明确的函数关系，则可首先建立目标函数，再求这个函数的最值或范围．

**四､解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出必要的文字说明､证明过程及演算步骤．**

15. 在直四棱柱中，底面为矩形，，分别为底面的中心和的中点，连接．



（1）求证：平面平面；

（2）若，求平面与平面所成角的余弦值．

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）由线面垂直得到线线垂直，即，进而得到平面，证明出面面垂直；

（2）建立空间直角坐标系，求出两平面的法向量，利用法向量的夹角余弦公式求出答案.

【小问1详解】

因为分别为底面的中心和的中点，

所以，

因为平面，平面，所以，

又因为，平面，所以平面，

因为平面，所以平面平面．

【小问2详解】

以为空间坐标原点，所在直线分别为轴建立空间直角坐标系．

由已知得，

所以，

又，

设平面与平面的法向量分别为，

所以，解得，令，则，

故，

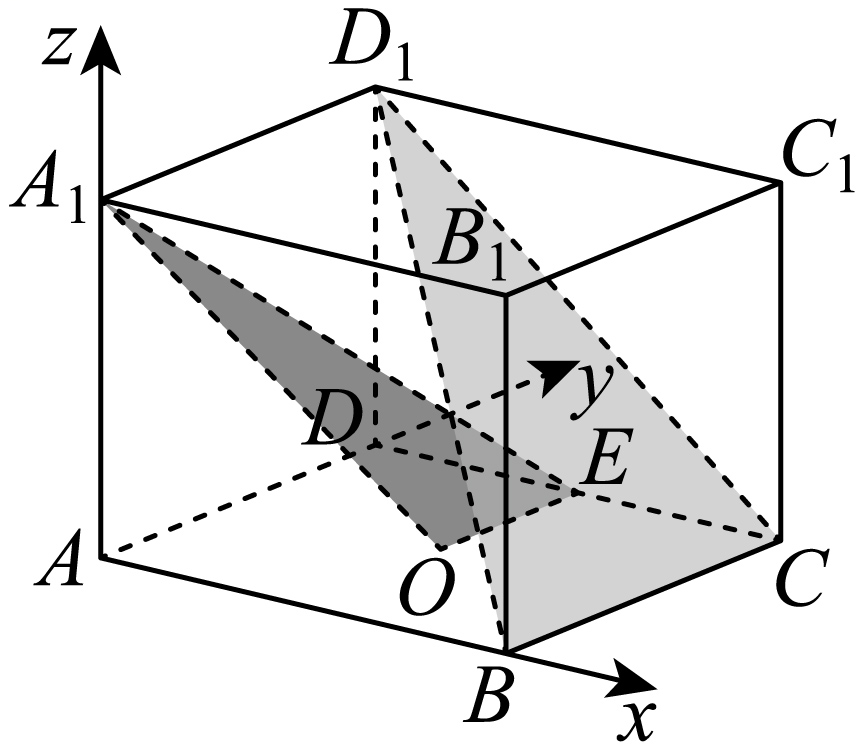
所以，解得，令，则，

故，

因为，所以，

设平面与平面所成角的大小为，

所以．



16. 某公司拟从水平相当的普通程序员中篮选出若干高级程序员，方法如下：首轮每位普通程序员被要求设计难度相同的甲､乙､丙､丁四种程序，假设每位普通程序员每种设计合格的概率都为，其中四种设计全部合格直接晋升为高级程序员；至少有两种（包括两种）“不合格”的直接被淘汰，否则被要求进行二轮设计：在三种难度不同的程序中随机抽取两种进行设计，且抽取的两种设计都合格方可晋升为高级程序员．已知每位普通程序员设计合格的概率分别为，同一普通程序员不同的设计相互不影响．

（1）已知设计合格的得分分别为，不合格得0分，若二轮设计中随机抽取到的得分为，求的分布列和数学期望；

（2）求每位普通程序员晋升为高级程序员的概率．

【答案】（1）分布列见解析；期望为

（2）

【解析】

【分析】（1）的可能取值为，分别求出对应的概率，列出分布列，求出数学期望即可；

（2）综合运用互斥事件的概率加法公式和独立事件的概率乘法公式求解即可.

【小问1详解】

的可能取值为，

由题意知，，

，

的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 90 | 100 | 190 |
|  |  |  |  |  |

．

【小问2详解】

因为同一普通程序员不同的设计相互不影响，所以每位普通程序员晋升为高级程序员的概率为

．

17. 在平面直角坐标系中，点的坐标分别为，以为圆心作一个半径为4的圆，点是圆上一动点，线段的重直平分线与直线相交于点．

（1）求的轨迹的方程；

（2）已知，点是轨迹在第一象限内的一点，为的中点，若直线的斜率为，求点的坐标．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）利用垂直平分线的性质及双曲线的定义可得答案；

（2）利用中点公式和的斜率为建立方程组，求解方程组可得答案.

【小问1详解】

由题意可知，点在线段的垂直平分线上，所以，

又点是圆上一动点，所以．

①当时，；

②当时，，

所以的轨迹满足，

根据双曲线定义可知，点的轨迹是以为左､右焦点，实轴长为的双曲线，

可得，所以的轨迹的方程为．

【小问2详解】

设，所以，

因为直线的斜率为，所以，即，

与联立解得（舍去）或3．

所以点的坐标为．

18. 已知函数.

（1）讨论函数的单调性；

（2）当时，求证：.

【答案】（1）答案见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）求出导函数，然后根据和分类讨论，解导函数不等式即可求得单调区间；

（2）根据（1）的结论知，令得，结合对数运算累加法即可证明.

【小问1详解】

的定义域为.

，

①当时，在上单调递增；

②当时，时，在上是增函数．

时，在上是减函数，

时，在上是增函数.

【小问2详解】

由（1）得，当时，，在上是减函数，

即当时，，所以，

令得，，即，

所以，得证.

19. 在等差数列中，已知成等差数列．

（1）求数列的通项公式；

（2）数列是否为等比数列？若是求其前项和，若不是，请说明理由；

（3）设，且，求所有取值．

【答案】（1）

（2）是等比数列，

（3）

【解析】

【分析】（1）设等差数列的首项为，公差为，依题意得到关于、的方程组，解得即可；

（2）根据等比数列的定义判断，再由等比数列求和公式计算可得；

（3）依题意可得当时无解，当时解得，说明时无解，即可确定的值.

【小问1详解】

设等差数列的首项为，公差为，

因为成等差数列，

所以，解得，

所以．

【小问2详解】

因为，，

所以是以为首项，为公比的等比数列，

所以数列的前项和为．

【小问3详解】

因为，所以，

因为，

所以，

当时，无解；

当时，解得或（舍去）；

当时，，即，

令，则为关于的单调递增函数，

因为，所以，

所以无解，

所以的取值为，

进一步得，当时，对任意的正整数，

，

满足：，

所以的所有取值是．

【点睛】关键点点睛：第三问由于的任意性取特殊值确定的值，再验证其合理性.