**雅礼中学2024届模拟试卷（二）**

**数 学**

命题人：伊波 审题人：陈朝阳

**注意事项：**

**1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。**

**2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。**

**3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1.函数的定义域是

A． B． C． D．

2.已知函数的图象是下列四个选项图象之一，且其导函数的图象如图所示，则该函数的图象是



A． B． C． D．

3.中心在坐标原点，离心率为的双曲线的焦点在*y*轴上，则该双曲线的渐近线方程为

A． B． C． D．

4.已知定义在上的函数是奇函数，对任意都有，当时，则等于

A．2 B． C．0 D．

5.将函数的图象向右平移（）个单位长度，再将图象上每一点的横坐标缩短到原来的倍（纵坐标不变），所得图象关于直线对称，则的最小值为

A． B． C． D．

6.为调查某地区中学生每天睡眠时间（单位：小时），采用样本量比例分配的分层随机抽样，现抽取初中生800人，其每天睡眠时间均值为9，方差为1，抽取高中生1200人，其每天睡眠时间均值为8，方差为0.5，则估计该地区中学生每天睡眠时间的方差为

A．0.96 B．0.94 C．0.79 D．0.75

7.在等腰△*ABC*中，，*AD*平分∠*BAC*且与*BC*相交于点*D*，则向量在上的投影向量为

A． B． C． D．

8.如图，点*P*在正方体的面对角线（包括端点）上运动，则下列结论一定成立的是



A．三棱锥的体积大小与点*P*的位置有关 B．与平面相交

C．平面平面 D．

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.**

9.设*a*，*b*，*c*，*d*为实数，且，则下列不等式正确的有

A． B． C． D．

10.在《增删算法统宗》中有这样一则故事：“三百七十八里关，初行健步不为难；次日脚痛减一半，如此六日过其关.”则下列说法正确的是

A．此人第二天走了九十六里路 B．此人第三天走的路程占全程的

C．此人第一天走的路程比后五天走的路程多六里 D．此人后三天共走了四十二里路

11.三棱锥*A*-*BCD*的侧棱*AB*垂直于底面*BCD*，，，三棱锥*A*-*BCD*的体积，则

A．三棱锥*A*-*BCD*的四个面都是直角三角形 B．

C． D．三棱锥*A*-*BCD*外接球的体积

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.**

12.在复数范围内方程的解为 .

13.已知圆*N*：，直线，圆*M*与圆*N*外切，且与直线相切，则点*M*的轨迹方程为 .

14.若*m*，，，，则 .（请用一个排列数来表示）

**四、解答题：本题共5小题，共77分.请在答题卡指定区域内作答.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15.（本小题满分13分）

在△*ABC*中，已知，外接圆半径.

（1）求角*C*的大小；

（2）求△*ABC*面积的最大值.

16.（本小题满分15分）

如图，四棱锥*P*-*ABCD*中，底面*ABCD*为平行四边形，，，，底面*ABCD*．



（1）证明：；

（2）若，求二面角*A*-*PB*-*C*的余弦值.

17.（本小题满分15分）

已知椭圆*G*：（）的离心率为，右焦点为，斜率为1的直线*l*与椭圆*G*交于*A*，*B*两点，以*AB*为底边作等腰三角形，顶点为.

（1）求椭圆*G*的方程；

（2）求△*PAB*的面积.

18.（本小题满分17分）

某手机*App*为了答谢新老用户，设置了开心大转盘抽奖游戏，制定了如下中奖机制：

每次抽奖中奖的概率为*p*，*n*次抽奖仍未中奖则下一次抽奖时一定中奖.每次中奖时有的概率中积分奖，有的概率中现金奖.若某一次中奖为积分奖，则下一次抽奖必定中现金奖，抽到现金奖后抽奖结束.

（1）若，，试求直到第3次才抽到现金奖的概率；

（2）若，，*X*表示抽到现金奖时的抽取次数.

（ⅰ）求*X*的分布列（用*p*表示即可）；

（ⅱ）求*X*的数学期望.（，结果四舍五入精确到个位数）

19.（本小题满分17分）

极值的广义定义如下：如果一个函数在一点的一个邻域（包含该点的开区间）内处处都有确定的值，而以该点处的值为最大（小），这函数在该点处的值就是一个极大（小）值.

对于函数，设自变量*x*从变化到，当，是一个确定的值，则称函数在点处右可导；当，是一个确定的值，则称函数在点处左可导.当函数在点处既右可导也左可导且导数值相等，则称函数在点处可导.

（1）请举出一个例子，说明该函数在某点处不可导，但是该点是该函数的极值点；

（2）已知函数.

（ⅰ）求函数在处的切线方程；

（ⅱ）若为的极小值点，求*a*的取值范围.

**雅礼中学2024届模拟试卷（二）**

**数学参考答案**

**一、二、选择题**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 答案 | D | B | A | A | C | B | D | C | AD | ACD | ABD |

2.B

【解析】由的图象知，为增函数，且在区间上增长速度越来越快，而在区间上增长速度越来越慢.故选B．

3.A

【解析】∵，∴，∴.∵双曲线的焦点在*y*轴上，∴双曲线的渐近线方程为.∴所求双曲线的渐近线方程为.故选A．

4.A

【解析】定义在上的函数是奇函数，且对任意都有，

故函数的图象关于直线对称，∴，故，

∴，∴是周期为4的周期函数.

则.故选A．

6.B

【解析】初中生人数，每天睡眠时间的平均数，方差；高中生人数，每天睡眠时间的平均数，方差.

总的样本平均数.总的样本方差.故选B．

7.D

【解析】设，由余弦定理可知，

∴，，

∵*AD*平分∠*BAC*且与*BC*相交于点*D*，△*ABC*是等腰三角形，

∴*D*是*BC*中点，，

由图可知向量在上的投影向量为，，

，∴.故选D.



8.C

【解析】

对于选项A，．

在正方体中，平面，所以点*P*到平面的距离不变，

即三棱锥的高不变，又的面积不变，

因此三棱锥的体积不变，

即三棱锥的体积与点*P*的位置无关，故A不成立；

对于选项B，由于，平面，平面，

所以平面，同理可证平面，又，

所以平面平面，因为平面，

所以平面，故B不成立；

对于选项C，因为，，，

所以平面，则；同理，

又，所以平面，

又平面，所以平面平面，故C成立；

对于选项D，当*B*与*P*重合时，*AP*与的夹角为，故D不成立.故选C．

9.AD

【解析】

因为，

所以，，

对于A，因为，由不等式的性质可得，故选项A正确；

对于B，取，，，，则，，所以，故选项B错误；

对于C，取，，，，则，，所以，故选项C错误；

对于D，因为，，则，所以，故，故选项D正确.故选AD．

10.ACD

【解析】设此人第*n*天走里路，则数列是首项为，公比为的等比数列，

因为，所以，

解得，

对于A，由于，所以此人第一天走了九十六里路，所以A正确；

对于B，由于，，所以B不正确；

对于C，由于，，所以此人第一天走的路程比后五天走的路程多六里，所以C正确；

对于D，，所以此人后三天共走了四十二里路，所以D正确.故选ACD．

11.ABD

【解析】

∵，，

构造如图所示的长方体，则*AD*为三棱锥*A*-*BCD*的外接球的直径.



设外接球的半径为*R*.

∵，

∴，

∴该长方体为正方体，

∴，

∴，

∴外接球体积为.

故选ABD．

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.**

12.

13.

【解析】由题意得，直线*l*：，且圆*N*：，

设点*M*到直线*l*的距离为*r*，则点*M*到*l*＇：与点*M*到点*N*的距离相等，都是，

故点*M*的轨迹是以*N*为焦点，以*l*＇为准线的抛物线，故方程为.

14.

【解析】

法一：直接计算，略.

法二：实际意义：从*n*个元素中选取*m*个元素排列到*m*个位置上去，对于两个指定的元素*a*，*b*进行分类，*a*，*b*都被选出来，有种排法，*a*，*b*中有一个被选出来，有种排法，*a*，*b*都没有被选出来，有种排法，所以.

法三：特值法试一试，如取，，再猜出排列数.

**四、解答题：本题共5小题，共77分.请在答题卡指定区域内作答.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15.【解析】

（1），

，

，

因为，

所以.

（2）由外接圆半径和正弦定理知，

，

当时，△*ABC*的面积最大值为.

16.【解析】

（1）因为，，，

由余弦定理得，

从而，故.

因为平面*ABCD*，平面*ABCD*，所以．

又，*AD*，平面*PAD*，

所以平面*PAD*．

因为平面*PAD*，

所以．

（2）如图，以*D*为坐标原点，射线*DA*，*DB*，*DP*分别为*x*，*y*，*z*的正半轴建立空间直角坐标系*D*-*xyz*，



则，，，.

，，

设平面*PAB*的法向量为，

则，即，

因此可取.

设平面*PBC*的法向量为，则，

可取，

则，

经判断，二面角*A*-*PB*-*C*为钝角，

故二面角*A*-*PB*-*C*的余弦值为.

17.【解析】

（1）由已知得，，解得，又，

所以椭圆*G*的方程为.

（2）设直线*l*的方程为，

由消去*y*得，①

设*A*，*B*的坐标分别为，（），*AB*中点为，

则，，

因为*AB*是等腰△*PAB*的底边，

所以，

所以*PE*的斜率为，解得，

此时方程①为，解得，，

所以，，所以，

又点到直线*AB*：的距离，

所以.

18.【解析】

（1）设抽到现金奖时共抽取了3次为事件*A*，则事件*A*包括第一次未中奖第二次未中奖第三次中了现金奖或第一次未中奖第二次中了积分奖第三次中现金奖，

则，

所以直到第3次才抽到现金奖的概率为.

（2）（ⅰ）*X*的可能取值为1，2，3，…，19，20，21.

，

，，3，…，19，

，

，

所以*X*的分布列为

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1 | 2 | … | *i* | … | 20 | 21 |
| *P* |  |  | … |  | … |  |  |

其中，3，…，19.

（ⅱ）

，

令，

则，

作差得，

所以，



，

所以*X*的数学期望约为19.

19.【解析】

（1），

为该函数的极值点，该函数在处的左导数为，右导数为1，

所以该函数在处不可导.

（2）（ⅰ）切线方程为.

（ⅱ），

因为当时，，故与同号，

，现考察的性质，

由于为偶函数，只需分析其在上的性质即可，

，，

，，

则必有，即.

①否则，若，即，

则必存在一个区间，使得，

则在单调递减，又，

则在区间内小于0，则在单调递减，

又，故在区间内小于0，

故在区间内小于0，

则不可能为的极小值点.

②当时，，

令，，

，

易知在区间上单调递增，

对，，

则在区间上大于0，

故在区间上单调递增.

故在区间上单调递增.

又，故，

故在区间上单调递增，

又，故，故在区间上单调递增，

又，故，，

则，，

故当时，，

由偶函数知时，，

故为的极小值点，

所以*a*的取值范围为.