**合肥市普通高中六校联盟2024-2025学年第一学期期中联考**

**高三年级数学试卷**

**（考试时间：120分钟 满分：150分）**

**命题学校：合肥三中 命题教师：蔡开根 审题教师：孟凡慧**

**一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共计40分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的，请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.**

1. 已知：，：，若是的必要不充分条件，则实数的取值范围是（ ）

A.  B. C.  D.

【答案】D

【解析】

【分析】

解不等式确定集合，然后由必要不充分条件得是的真子集可得结论．

【详解】∵且或，，又是的必要不充分条件，∴，∴，

故选：D*.*

【点睛】结论点睛：本题考查由必要不充分条件求参数，一般可根据如下规则判断：

命题对应集合，命题对应的集合，则

（1）是的充分条件；

（2）是的必要条件；

（3）是的充分必要条件；

（4）是的既不充分又不必要条件集合之间没有包含关系．

2. 已知集合，，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据偶次根下大于等于零，结合对数函数的单调性，可得集合；根据三角函数的性质可得集合，结合交集的运算可得答案.

【详解】由题意且，故，解得，故；

由得，故；

综上.

故选：D.

3. 已知，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】化对数式为指数式判断，判断，化指数式为对数式判断，则答案可求.

【详解】由，得；

由，得；

由，得.

∴.

故选：C*.*

【点睛】本题考查指数式、对数式中的大小比较，一般可利用中介值和函数单调性进行大小比较，是基础题.

4. 已知函数是上的奇函数，且当时，，则当时有（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性，设，则，，再变形可得函数解析式.

【详解】解：设，则，

因为当时，



又函数是上的奇函数





故当时有

故选：

【点睛】本题考查函数的奇偶性，属于基础题.

5. 已知，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】先由平方差公式化简已知条件并结合二倍角的余弦公式得，进而得，从而结合二倍角正弦公式即可计算求解.

【详解】因为，

所以，

所以 ，即，

所以由得，

所以.

故选：A.

6. 若函数的定义域为，则实数取值范围是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】分析可知，在上恒成立，分、两种情况讨论，在时，直接验证即可；在时，可得出，综合可解得实数的取值范围.

【详解】由题意，函数的定义域为，

等价于在上恒成立，

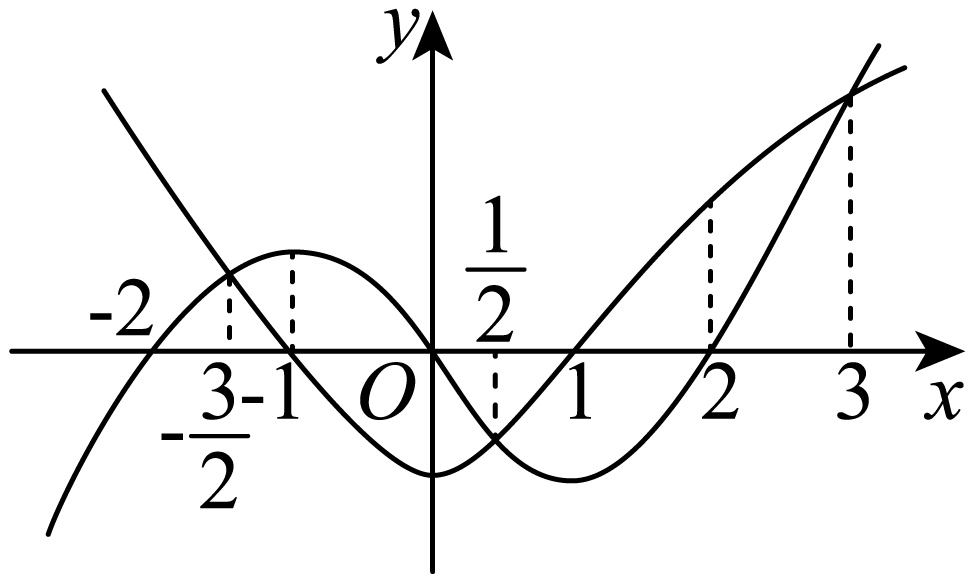
若，则在上恒成立，满足条件；

若，则，解得.

综上，实数的取值范围是，

故选：A．

7. 已知函数与的图象如图所示，则函数（ ）



A. 在区间上是减函数 B. 在区间上是减函数

C. 在区间上是减函数 D. 在区间上是减函数

【答案】B

【解析】

【分析】求出函数的导数，结合图象求出函数的单调区间即可求解．

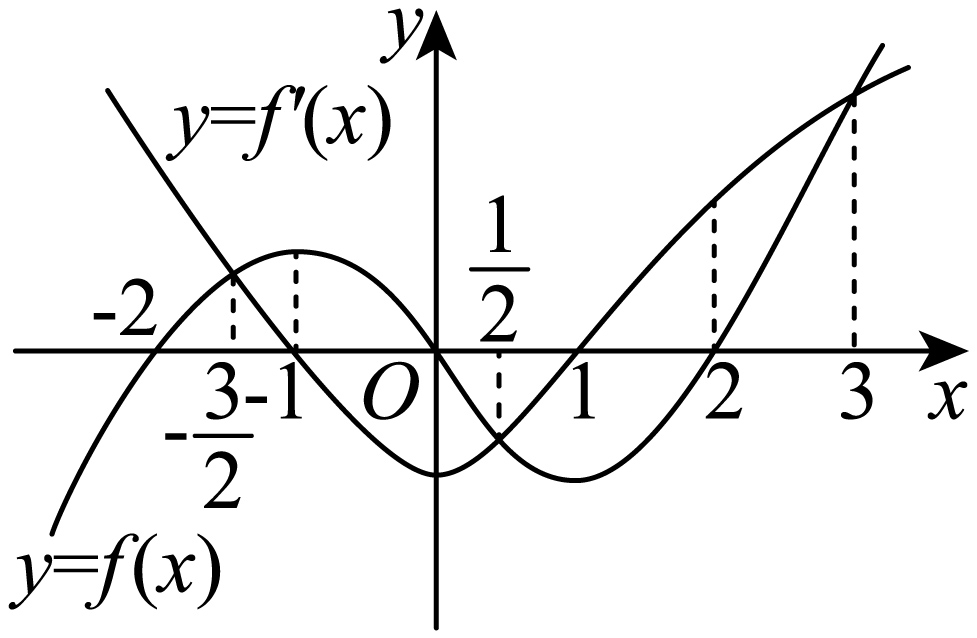
【详解】因为，

由图象知，时，，又，所以当时，，

即在上单调递减，

当时，，又，所以当时，，

即在上单调递增，所以选项A、C和D错误，选项B正确，



故选：B．

8. 定义：如果函数在区间上存在，满足，，则称函数是在区间上的一个双中值函数，已知函数是区间上的双中值函数，则实数的取值范围是

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【详解】，

∵函数是区间上的双中值函数，  
∴区间上存在 ，  
满足

∴方程在区间有两个不相等的解，  
令，  
则，

解得

∴实数的取值范围是.

故选:A．

**二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共计18分.每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对得部分分，有选错的得0分，请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.**

9. 已知奇函数的定义域为，若，则（ ）

A.  B. 的图象关于直线对称

C.  D. 的一个周期为

【答案】AD

【解析】

【分析】由奇函数可得，再根据函数的周期性与对称性分别判断.

【详解】由函数为奇函数，则，A选项正确；

又，即，则函数关于直线对称，B选项错误；

由可知，

即，函数的一个周期为，C选项错误，D选项正确；

故选：AD.

10. 函数满足，则正确的是（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】AC

【解析】

【分析】根据给定条件，构造函数，利用导数探讨单调，再比较大小即得.

【详解】依题意，令函数，求导得，函数在R上递减，

对于A，，，则，A正确；

对于B，，，则，B错误；

对于C，，，则，C正确；

对于D，，，则，D错误.

故选：AC

11. 已知，则（ ）

A. 的最小值为  B. 的最大值为

C. 的最小值为  D. 的最小值为

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据指数运算，结合基本不等式即可判断A；结合对数运算，利用基本不等式可判断B；将化为关于*x*的二次函数，结合二次函数性质可判断是C；通过变量代换，令，得到，根据“1”的巧用，将变形后，利用基本不等式，即可判断D..

【详解】对于A，由于，故，

当且仅当，结合，即时，等号成立，

即的最小值为 ，A正确；

对于B，由于，，则，

当且仅当时，等号成立，

故，即的最大值为，B正确；

对于C，又，得，

故

由于，而对称轴为，

则在上单调递减，在上无最值，C错误；

对于D，令，则，

故，

由于，故，

，

则，

当且仅当，结合，即时，等号成立，

所以，

即的最小值为，D正确，

故选：ABD

【点睛】难点点睛：本题考查了基本不等式的应用，主要是求最值问题，难点是选项D的判断，解答时要通过变量代换，令，得到，根据“1”的巧用，将变形后，利用基本不等式，即可求解.

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.**

12. 已知函数对任意满足，则\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】采用方程组法消去，得出的解析式即可.

【详解】因为，以代替得：

，

得：.

故答案为：.

13. 若函数，则使得成立的的取值范围是\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】由题知函数为偶函数且在单调递增，由此抽象出不等式，解出即可

【详解】由函数的定义域为,



所以函数为偶函数

当时，与为单调递增函数

所以在单调递增

所以

所以

解得：

故答案为：

14. 已知点*A*是函数图象上的动点，点*B*是函数图象上的动点，过*B*点作*x*轴的垂线，垂足为*M*，则的最小值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】根据抛物线的焦半径公式可将问题转化为到上一点的最小距离即可，根据点点距离公式，得，利用导数求解最小值即可.

【详解】由于是焦点在轴上的抛物线，故设其焦点为，

则,所以,

故求到上一点的最小距离即可，

设，则，

记，则

由于函数在单调递增，且，

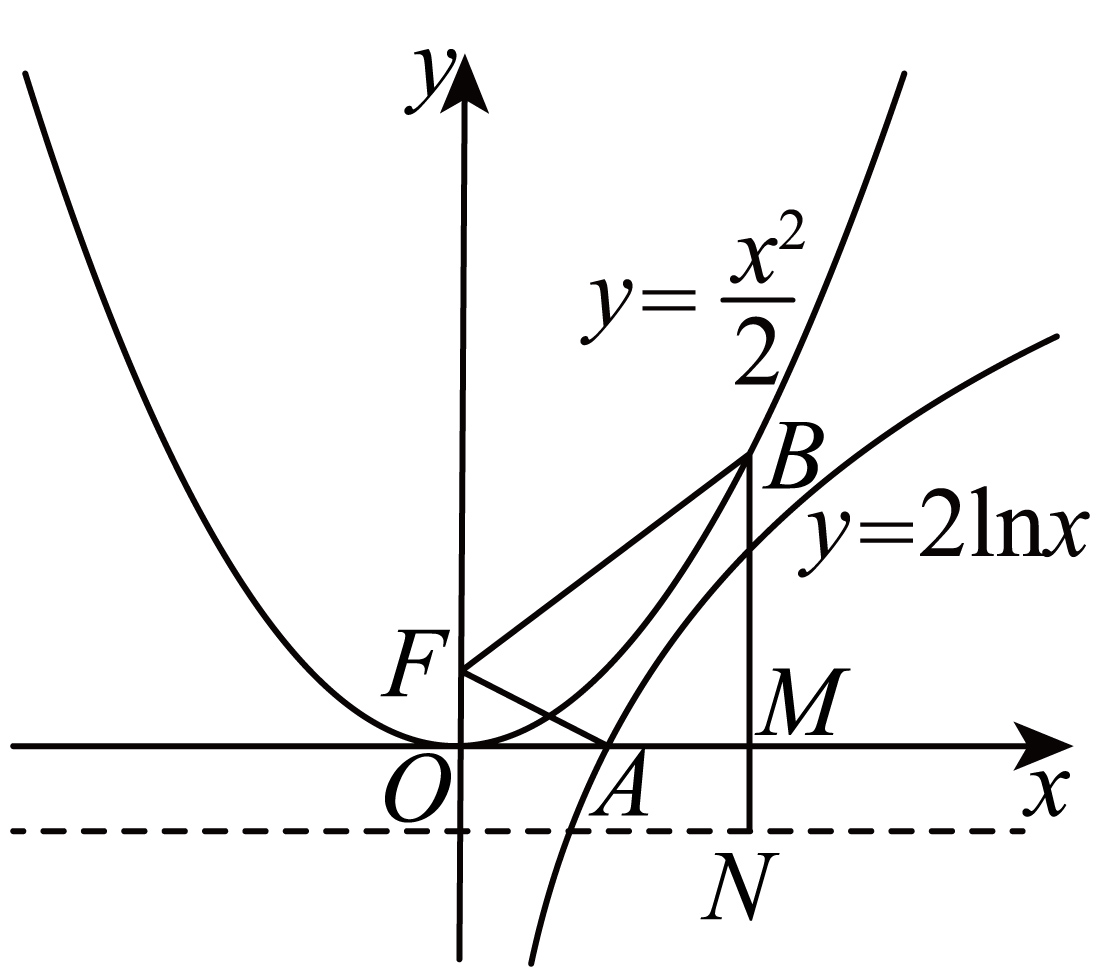
故当时，因此在单调递减，

当时，因此在单调递增，

故，

因此，故，

故答案：



**四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15. 已知函数．

（1）求的最小正周期和单调增区间；

（2）若函数在存在零点，求实数*a*的取值范围．

【答案】（1），

（2）

【解析】

【分析】（1）化简函数，结合三角函数的图象与性质，即可求解；

（2）根据题意转化为方程在上有解，以为整体，结合正弦函数图象运算求解.

【小问1详解】

对于函数

，

所以函数的最小正周期为，

令，则，

∴函数的单调递增区间为.

【小问2详解】

令，即，则，

∵在存在零点，则方程在上有解，

若时，则，可得，

∴，得

故实数的取值范围是．

16. 已知函数.

（1）讨论函数的单调性；

（2）当时，证明：当时，.

【答案】（1）答案见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用导数与函数单调性的关系，分类讨论即可得解；

（2）构造函数，利用二次导数，结合函数的最值情况，证得，从而得证.

【小问1详解】

因为的定义域为，

所以，

当时，恒成立，所以在上单调递增；

当时，令，得，

当时，单调递减，

当时，单调递增，

综上，当时，在上单调递增；

当时，在上单调递减，在上单调递增.

【小问2详解】

当时，，

令，则，

令，则，

因为，所以，

所以当时，恒成立，所以在上单调递减，

即在上单调递减，所以，

所以在上单调递减，

所以，即.

【点睛】结论点睛：恒成立问题：

（1）恒成立；恒成立．

（2）恒成立；恒成立．

（3）恒成立；恒成立；

（4），，．

17. 在锐角中，角*A*，*B*，*C*所对应的边分别为*a*，*b*，*c*，已知．

（1）求角*B*的值；

（2）若，求的周长的取值范围．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）根据正弦定理得到，再利用余弦定理求出；

（2）根据正弦定理得到，从而得到，求出，得到，，从而求出周长的取值范围.

【小问1详解】

，由正弦定理得：，

即，

由余弦定理得：，

因为，

所以；

【小问2详解】

锐角中，，，

由正弦定理得：，

故，

则

，

因为锐角中，，

则，，

解得：，

故，，

则，

故，

所以三角形周长的取值范围是.

【点睛】解三角形中最值或范围问题，通常涉及与边长，周长有关的范围问题，与面积有关的范围问题，或与角度有关的范围问题，

常用处理思路：①余弦定理结合基本不等式构造不等关系求出答案；

②采用正弦定理边化角，利用三角函数的范围求出最值或范围，如果三角形为锐角三角形，或其他的限制，通常采用这种方法；

③巧妙利用三角换元，实现边化角，进而转化为正弦或余弦函数求出最值

18. 已知函数，.

（1）若，求的极值；

（2）设函数在处的切线方程为，若函数是上的单调增函数，求的值；

（3）函数的图象上是否存在不同的两点，使得函数的图象在这两点处的切线重合，若存在则求出的取值范围，若不存在则说明理由.

【答案】（1）的极大值为，极小值为

（2）

（3）不存，理由见解析

【解析】

【分析】（1）令，列极值表，即可求得极值；

（2）求出切线方程，设，转化为在恒成立，再由基本不等式成立可得答案；

（3）假设存在符合题意的直线，设两个切点分别为，，分别代入切线方程和整理得，设，转化为，设，由导数判断出单调性可得答案.

【小问1详解】

当时，，

则，

令，解得：或，列表如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 单调递增 | 极大值 | 单调递减 | 极小值 | 单调递增 |

由表可知，当时，的极大值为，

当时，的极小值为；

【小问2详解】

因为，所以，

所以处切线方程为，

整理得：，

设，则：

，

由题意可知，

恒成立.

因为，

当且仅当时，等号成立，所以应有，

而，，所以只有即时，，

即成立，

所以.

【小问3详解】

由（2）可知，曲线在处切线方程为：

，

假设存在符合题意的直线，设两个切点分别为，，

则： ，

由①式可得：，代入②式，则：，

整理得：，

设，则，设，

则，

所以单调递减，

因为，所以的解为.

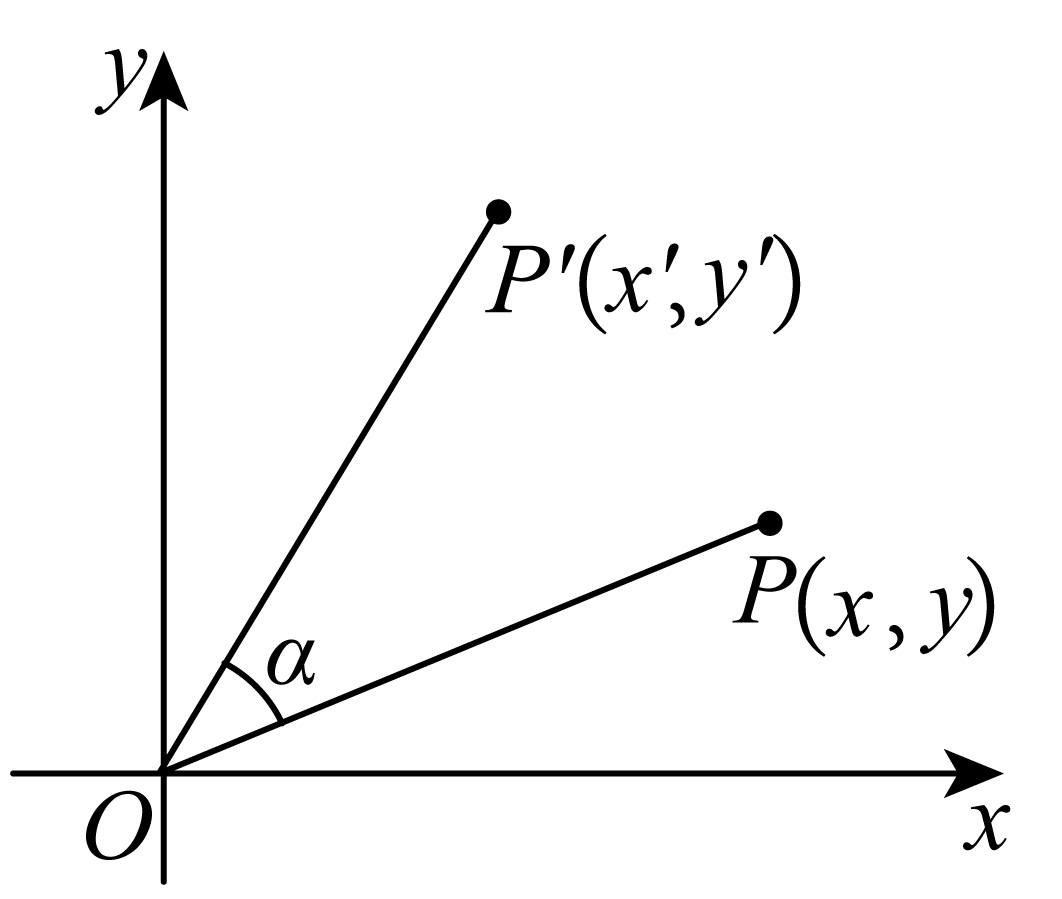
即，解得，

此时，

所以不存在符合题意的两点，使得函数的图象在这两点处的切线重合.

【点睛】本题考查导数与函数的单调性与极值，切线问题，转化与化归能力，准确计算是关键，第三问转化为函数与方程的关系是难点，是较难的题目.

19. 在平面直角坐标系中，利用公式①（其中，，，为常数），将点变换为点的坐标，我们称该变换为线性变换，也称①为坐标变换公式，该变换公式①可由，，，组成的正方形数表唯一确定，我们将称为二阶矩阵，矩阵通常用大写英文字母，，…表示．



（1）在平面直角坐标系中，将点绕原点按逆时针旋转得到点（到原点距离不变），求点的坐标；

（2）如图，在平面直角坐标系中，将点绕原点按逆时针旋转角得到点（到原点距离不变），求坐标变换公式及对应二阶矩阵；

（3）向量（称为行向量形式），也可以写成，这种形式的向量称为列向量，线性变换坐标公式①可以表示为：，则称是二阶矩阵与向量的乘积，设是一个二阶矩阵，，是平面上的任意两个向量，求证：．

【答案】（1）

（2），

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用三角函数的定义得到旋转之前的和，再由两角和的正弦、余弦公式得到点的坐标；

（2）利用三角函数的定义得到旋转之前的和，再由两角和的正弦、余弦公式得到点的坐标，再根据变换公式的定义得到变换公式及与之对应的二阶矩阵；

（3）根据定义分别计算、、，证明即可.

【小问1详解】

可求得，设，则，，

设点，，

故



所以.

【小问2详解】

设，，则，，，

故



所以坐标变换公式为，

该变换所对应的二阶矩阵为

【小问3详解】

设矩阵，向量，，则．

，

对应变换公式为：，

，

所以

故对应变换公式同样为

所以得证.

【点睛】方法点睛：利用三角函数的定义解题：（1）角的顶点与坐标原点重合；（2）角的始边与轴正半轴重合；在角的终边上任取一点，该点到原点的距离，则：；； .