# **重庆市育才中学校高 2025 届 2024-2025 学年(上) 12 月月考**

# 数学试题

本试卷为第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 共 150 分, 考试时间 120 分钟。

注意事项:1. 答卷前,请考生务必把自己的姓名、准考证号填写在答题卡上；

2. 作答时, 务必将答案写在答题卡上, 写在本试卷及草稿纸上无效;

3. 考试结束后, 将答题卡交回。

# 第 I 卷

# 一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一个 选项是符合题目要求的。

1. 设集合 $M=\left\{x∣x^{2}−3\leq 0\right\},N=\{−2,−1,0,1,2\}$ ,则 $M∩N=$

A. $\{0,1\}$ B. $\{−1,0,1\}$ C. $\{−1,0,1,2\}$ D. $\{−2,−1,0,1,2\}$

2. 已知随机变量 $ξ$ 服从正态分布 $N\left(2,σ^{2}\right),P\left(1<ξ\leq 2\right)=0.2$ ,则 $P\left(ξ>3\right)=$

A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

3. 已知直线 $l//$ 平面 $α$ ,点 $P\in α$ ,那么过点 $P$ 且平行于直线 $l$ 的直线

A. 有且只有 1 条,且在平面 $α$ 内 B. 有且只有 1 条,不在平面 $α$ 内

C. 有无数条,不都在平面 $α$ 内 D. 有无数条,都在平面 $α$ 内

4. 函数 $f\left(x\right)=cosx−x$ 的零点所在区间为

A.(-1,0) B.(0,1) C.(1,2) D.(2,3)

5. 若正实数 $a,b$ 满足 $a=1−2b$ ,则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为

A. 1 B. 6 C. 8 D. 9

6. 从 3 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加一项创新大赛, 则选出的 3 人中既有男生又有女生的概率为

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{9}{10}$

7. 已知 $sin\left(α+β\right)=\frac{1}{2},tanα=5tanβ$ ,则 $sin\left(α−β\right)=$

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

8. 若正实数 $x,y$ 满足 $x+y>e^{x}+lny$ ,则下列不等式成立的是

A. $x−y<−1$ B. $x−y>−1$ C $x+y<1$ D. $x+y>1$

# 二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题 目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 已知点 $A\left(0,2\right)、B\left(2,0\right)、C\left(1,y\right)$ ,其中 $y\in R$ ,则

A. 若 $A、B、C$ 三点共线,则 $y=1$

B. 若 $\vec{AB}⊥\vec{AC}$ ,则 $y=3$

C. 若 $\left|\vec{AB}\right|=\left|\vec{AC}\right|$ ,则 $y=2−\sqrt{7}$

D. 当 $y=2$ 时, $⟨\vec{AB},\vec{AC}⟩=\frac{π}{4}$

10. 已知正方体 $ABCD−A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$ 的棱长为 $2,E、F$ 分别为棱 $AB、AA\_{1}$ 的中点,则

A. $E、F、D\_{1}、C$ 四点共面

B. 直线 $AD$ 与 $D\_{1}E$ 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

C. 二面角 $A−FD\_{1}−E$ 的大小为 $\frac{π}{4}$

D. 三棱锥 $B\_{1}−CEF$ 的体积为 1

11. 若数列 $\left\{F\_{n}\right\}$ 满足 $F\_{1}=F\_{2}=1,F\_{n+2}=F\_{n+1}+F\_{n}\left(n\in N^{∗}\right)$ ,设 $a\_{n}=\left(−1\right)^{F\_{n}F\_{n−1}}$ ,则

A. $a\_{4}=1$

B. $a\_{2024}+a\_{2025}=2$

C. $a\_{n}=a\_{n+3}$

D. 若数列 $\left\{a\_{n}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 30,则 $n=90$ 或 $n=92$

# 第II卷

# 三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。第 14 题第一空 2 分,第二空 3 分。

12. 已知复数 $z=\frac{1}{1+2i}$ (其中 $i$ 为虚数单位),则 $z⋅\leftharpoonaccent{z}=$ \_\_\_\_\_.

13. 若函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}+x^{2}−mx\left(m\in R\right)$ 在 $R$ 上单调递增,则实数 $m$ 的取值范围为\_\_\_\_\_.

14. 若正四面体 $A−BCD$ 的棱切球 (球与正四面体的棱均相切) 半径为 1,则正四面体 $A−BCD$ 的棱长为\_\_\_\_\_；该棱切球的球面与正四面体 $A−BCD$ 的表面相交所得曲线的总长度为\_\_\_\_\_.

# 四、解答题:本题共 5 题,共 77 分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

已知非零数列 $\left\{a\_{n}\right\}$ 满足: $a\_{1}=1,a\_{n}−a\_{n+1}=2a\_{n}⋅a\_{n+1}\left(n\in N^{∗}\right)$ .

(1)求证: $\left\{\frac{1}{a\_{n}}\right\}$ 是等差数列；

(2)求数列 $\left\{a\_{n}⋅a\_{n+1}\right\}$ 的前 $n$ 项和 $S\_{n}$

16. (本小题满分 15 分)

若 $△ABC$ 中的内角 $A、B、C$ 所对的边分别为 $a、b、c$ ,且满足 $bsinA=\sqrt{3}a\left(1−cosB\right)$ .

(1) 求角 $B$ ;

(2)若 $b=2\sqrt{3}$ ,请从下列两个条件:① $a=2c$ ,② $cosC=\frac{\sqrt{3}}{4}c$ 中任选一个作为已知条件,求 $△ABC$ 的面积。

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答给分。

17. (本小题满分 15 分)

如第(17)题图,在四棱锥 $S−ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为菱形,点 $E$ 为棱 $SA$ 的中点,$BD⊥SC$ .

(1)求证: $SC//$ 平面 $BED$ ；

(2)求证:平面 $SAC⊥$ 平面 $ABCD$ ；

(3)若 $SC⊥AC$ ,且 $AB=SC=2$ , $∠ABC=120^{∘}$ ,求直线 $AB$ 与平面 $SAD$ 所成角的正弦值。


第(17)题图

18. (本小题满分 17 分)

育才中学为普及法治理论知识,举办了一次法治理论知识闯关比赛。比赛规定:三人组队参赛,按顺序依次闯关,无论成败,每位队员只闯关一次。如果某位队员闯关失败,则由该队下一队员继续闯关, 如果该队员闯关成功,则视作该队获胜,余下的队员无需继续闯关；若三位队员闯关均不成功,则视为该队比赛失败。比赛结束后,根据积分获取排名,每支获胜的队伍积分 $Y$ 与派出的闯关人数 $X$ 的关系如下: $Y=40−10X\left(X=1,2,3\right)$ ,比赛失败的队伍则积分为 0 。现有甲、乙、丙三人组队参赛,他们各自闯关成功的概率分别为 $p\_{1}、p\_{2}、p\_{3}$ ,且每人能否闯关成功互不影响。

(1)已知 $p\_{1}=\frac{3}{4},p\_{2}=\frac{2}{3},p\_{3}=\frac{1}{2}$ ,

(i) 若按甲、乙、丙的顺序依次参赛,求该队比赛结束后所获积分 $Y$ 的期望;

(ii) 若第一次闯关从三人中随机抽取,求该队比赛结束后所获积分 $Y=30$ 的概率。

(2)若甲只能安排在第二位次参赛,且 $0<p\_{1}<p\_{2}<p\_{3}<1$ ,要使该队比赛结束后所获积分 $Y$ 的期望最大, 试确定乙、丙的参赛顺序, 并说明理由。

19.(本小题满分 17 分)

已知函数 $f\left(x\right)=lnx$ .

(1)求曲线 $y=f\left(x\right)$ 过点(0,1)的切线方程；

(2)设 $a\_{n}=\frac{n}{n+1}\left(n\in N^{∗}\right)$ ,曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(a\_{n},f\left(a\_{n}\right)\right)$ 处的切线与 $x$ 轴, $y$ 轴围成的三角形面积为 $S\_{n}$ ,记 $c\_{n}=\sqrt{\frac{S\_{n}}{a\_{n}}}$ ,$ 求\sum\_{k=1}^{n}c\_{k}$ ;

(3)设函数 $g\left(x\right)=\frac{ae^{x}}{x}−x+f\left(x\right)\left(a\in R\right)$ ,若 $g\left(x\right)$ 在定义域内有三个不同的极值点 $x\_{1},x\_{2},x\_{3}$ ,且满足 $g\left(x\_{1}\right)⋅g\left(x\_{2}\right)⋅g\left(x\_{3}\right)\geq \frac{1}{e}−1$ ,求实数 $a$ 的取值范围。

#

# 数学参考答案

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 选项 | B | C | A | B | C | D | B | A | ABD | ABD | BC |

【部分题解析】

8. $∵$ 正实数 $x,y$ 满足 $x+y>e^{x}+lny$ ,整理得 $x−e^{x}>lny−y$ ,即 $x−e^{x}>lny−e^{lny}$

(\*),构造函数 $f\left(x\right)=x−e^{x}\left(x>0\right),∴$ 不等式(\*)等价为 $f\left(x\right)>f\left(lny\right),∵x>0$ ,

$∴f^{′}\left(x\right)=1−e^{x}<0,∴f\left(x\right)=x−e^{x}$ 在 $\left(0,+\infty \right)$ 单调递减, $∴0<x<lny,∴x−y<$

$lny−y<−1$ ,选项 A 正确

11. 由题知,数列 $\left\{F\_{n}\right\}$ 为斐波拉契数列,即 $1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots \cdots ,∴a\_{4}=\left(−1\right)^{3×5}=−1$ ,

选项 A 错误; 又 $F\_{n}⋅F\_{n+1}$ 呈现 “奇偶偶 奇偶偶 奇偶 偶 - “ - ” 的规律, $∴$ 数列 $\left\{a\_{n}\right\}$ 各项依次为-1, $1,1,−1,1,1,\cdots \cdots ,∴a\_{n}$ 最小正周期为 3,满足 $a\_{n}=a\_{n+3}$ ,选 $C$ 正确; $a\_{2024}=a\_{674×3+2}=a\_{2}=1,a\_{2025}=a\_{675×3}=a\_{3}=1,∴a\_{2024}+a\_{2025}=2, B$ 正确; 对于选项 $D$ ,当 $n=90,n=92$ 或 $n=94$ 时,数列 $\left\{a\_{n}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $30,∴$ 选项 $D$ 错误.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 12 | 13 | 14 |
| 答案 | $$\frac{1}{5}$$ | $$\left(0,+\infty \right)$$ | $$\frac{8\sqrt{6}}{3}π$$ |

1. $∵$ 正四面体 A-BCD 的内接于一正方体中, $∴$ 其棱切球为该正方体的内切球, $∴$ 该正方体的棱长为正四面体 A-BCD 棱切球的直径 2, $∴$ 正四面体 A-BCD 的棱长为该正方体面对角线长 $2\sqrt{2}$ ; 又棱切球的球面与正四面体 A-BCD 的表面相交所得到的曲线为四个圆 (例如圆 $I$ 内切于 $△ABC$ ),其半径为 $\frac{\sqrt{6}}{3},∴$ 四个圆周长为 $4×2π×\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{8\sqrt{6}}{3}π$ .

15.(13 分)

解 (1) $\left\{\frac{1}{a\_{n}}\right\}$ 为等差数列,公差为 2,首项 $\frac{1}{a\_{1}}=1$ ;

(2) $S\_{n}=\frac{n}{2n+1}$ .

16.(15 分)

解: (1) $∵$ 在 $△ABC$ 中 $bsinA=\sqrt{3}a\left(1−cosB\right)$ ,

由正弦定理 $\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}$ ,可知 $sinBsinA=\sqrt{3}sinA\left(1−cosB\right)$ ,

又 $sinA\ne 0,∴sinB=\sqrt{3}\left(1−cosB\right)$ ,即 $sinB+\sqrt{3}cosB=\sqrt{3},∴sin\left(B+\frac{π}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

又 $∵0<B<π,\frac{π}{3}<B+\frac{π}{3}<\frac{4π}{3},∴B+\frac{π}{3}=\frac{2π}{3}$ ,即 $B=\frac{π}{3}$ ;

(2)若选 ① $a=2c$ ,

由余弦定理 $b^{2}=a^{2}+c^{2}−2accosB$ ,知 $\left(2\sqrt{3}\right)^{2}=\left(2c\right)^{2}+c^{2}−2×2c×c×cos\frac{π}{3}$ ,

解得 $c=2,a=4$ ,

$∴△ABC$ 的面积 $S\_{△ABC}=\frac{1}{2}acsinB=\frac{1}{2}×4×2×\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ .

17.(15 分)



解: (1) 证明: 连接 $AC$ 交 $BD$ 于 $O$ ,连接 $OE$ ,

$∵ABCD$ 为菱形, $∴O$ 为 $AC$ 的中点,

又 $E$ 为 $SA$ 的中点, $∴$ 在 $△ASC$ 中, $OE//SC$ ,

又 $EOC$ 平面 $BED,SC⊄$ 平面 $BED$ ,

$∴SC//$ 平面 $BED$ ;

(2)证明: $∵$ 在菱形 $ABCD$ 中, $BD⊥AC$ ,又 $BD⊥SC$ , $AC∩SC=C,AC,SC⊂$ 平面 $SAC$ ,

$∴BD⊥$ 平面 $SAC$ ,

又 $BDC$ 平面 $ABCD$ ,

$∴$ 平面 $SAC⊥$ 平面 $ABCD$ ;

(3)由(2)可知,平面 $SAC⊥$ 平面 $ABCD$ ,且平面 $SAC∩$ 平面 $ABCD=AC$ ,

又由题知 $SC⊥AC,SC⊂$ 平面 $SAC,∴SC⊥$ 平面 $ABCD$ ,

由(1) 知 $OE//SC,∴OE⊥$ 平面 $ABCD$ ,且在菱形 $ABCD$ 中, $BD⊥AC$ ,

$∴$ 以 $O$ 为坐标原点, $OA,OB,OE$ 所在直线分别为 $x$ 轴、 $y$



轴、 $z$ 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,

由题意,在菱形 $ABCD$ 中, $AB=2,∠ABC=120^{∘}$ ,

$∴$ 在 $△ABC$ 中由余弦定理可求得, $AC=2\sqrt{3}$ ,

$∴OA=OC=\sqrt{3},OB=OD=1$ ,设平面 $SAD$ 的法向量为 $\vec{n}$ $=\left(x,y,z\right)$ ,

由 $\left\{\begin{matrix}\vec{n}⊥\vec{AD}\\\vec{n}⊥\vec{AS}\end{matrix}\right.$ ,即 $\left\{\begin{matrix}\vec{n}⋅\vec{AD}=0\\n⋅\vec{AS}=0\end{matrix}\right.$ ,得 $\left\{\begin{matrix}−\sqrt{3}x−y=0\\−2\sqrt{3}x+2z=0\end{matrix}\right.$ ,

令 $x=1$ 得 $y=−\sqrt{3},z=\sqrt{3},∴$ 可取平面 $SAD$ 的一个法向量 $\vec{n}=\left(1,−\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ ,

$∴sinθ=\left|cos<\vec{n},\vec{AB}\right|=\frac{\left|\vec{n}⋅\vec{AB}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{AB}\right|}=\frac{\left|−\sqrt{3}−\sqrt{3}\right|}{2×\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$ ,

$∴$ 直线 $AB$ 与平面 $SAD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

18.(17 分)

解: (1) (i) $E\left(Y\right)=30×\frac{3}{4}+20×\frac{1}{6}+10×\frac{1}{24}+0×\frac{1}{24}=\frac{105}{4}$ .

(ii) $P\left(A\right)=\frac{1}{3}×\frac{3}{4}+\frac{1}{3}×\frac{2}{3}+\frac{1}{3}×\frac{1}{2}=\frac{23}{36}$

(2)若依次派出乙、甲、丙进行闯关,该队比赛结束后所获积分 $Y\_{1}$ 的可能取值为

30,20,10,0,

E $\left(Y\_{1}\right)=30×p\_{2}+20×\left(1−p\_{2}\right)×p\_{1}+10×\left(1−p\_{2}\right)×\left(1−p\_{1}\right)×p\_{3}+0×\left(1−p\_{2}\right)×\left(1−p\_{1}\right)×\left(1−p\_{3}\right)$

$$=30p\_{2}+20\left(1−p\_{2}\right)p\_{1}+10\left(1−p\_{2}\right)\left(1−p\_{1}\right)p\_{3},$$

若依次派出丙、甲、乙进行闯关,该队比赛结束后所获积分 $Y\_{2}$ 的可能取值为30,20,10,

0 ,

$E\left(Y\_{2}\right)=30p\_{3}+20\left(1−p\_{3}\right)p\_{1}+10\left(1−p\_{3}\right)\left(1−p\_{1}\right)p\_{2}$ ,

$$∴E\left(Y\_{1}\right)−E\left(Y\_{2}\right)=10\left(p\_{2}−p\_{3}\right)\left(2−p\_{1}\right)$$

$∵0<p\_{1}<p\_{2}<p\_{3}<1,∴p\_{2}\\_p\_{3}<0,2\\_p\_{1}>0,∴E\left(Y\_{1}\right)–E\left(Y\_{2}\right)<0$ ,即 $E\left(Y\_{1}\right)<E\left(Y\_{2}\right)$ ,

$∴$ 要使该队比赛结束后所获积分 $Y$ 的期望最大,应最先派出丙,最后派出乙.

19.(17 分)

解: (1) $y=\frac{1}{e^{2}}x+1$

(2)由(1)知,曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(a\_{n},f\left(a\_{n}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y−f\left(a\_{n}\right)=\frac{1}{a\_{n}}\left(x−a\_{n}\right)$ ,

令 $x=0$ 得 $y\_{n}=f\left(a\_{n}\right)−1$ ,令 $y=0$ 得 $x\_{n}=\\_a\_{n}\left[f\left(a\_{n}\right)−1\right]$ ,

又 $∵a\_{n}=\frac{n}{n+1}\in \left(0,1\right),f\left(a\_{n}\right)=ln\frac{n}{n+1}<0$ ,

$∴S\_{n}=\frac{1}{2}\left|x\_{n}\right|⋅\left|y\_{n}\right|=\frac{1}{2}a\_{n}\left[f\left(a\_{n}\right)−1\right]^{2}$ ,

$$c\_{n}=\sqrt{\frac{S\_{n}}{a\_{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|f\left(a\_{n}\right)−1\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1−ln\frac{n}{n+1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+ln\left(n+1\right)−lnn\right],$$

$$∴\sum\_{k=1}^{n}c\_{k}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum\_{k=1}^{n}\left[1+ln\left(k+1\right)−lnk\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[n+ln\left(n+1\right)\right];$$

(3) $∵g\left(x\right)=\frac{ae^{x}}{x}⋅x+lnx,g^{′}\left(x\right)=\frac{\left(x−1\right)\left(ae^{x}−x\right)}{x^{2}},x>0$ ,

$∵$ 函数 $g\left(x\right)$ 在定义域内有三个不同的极值点,

$∴g^{′}\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty \right)$ 上有三个不同的变号零点,

又 $∵g^{′}\left(1\right)=0$ ,令 $h\left(x\right)=ae^{x}−x$ ,

$∴h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty \right)$ 上至少有两个不为 1 的不同零点,

$∵h^{′}\left(x\right)=ae^{x}−1,x\in \left(0,+\infty \right)$ ,

① 当 $a\in \left(−\infty ,0]时,∴h^{′}\left(x\right)\leq 0,∴h\left(x\right)在\left(0,+\infty \right)上单调递减，h\left(x\right)最多有一个零点，∴舍\right)$

② 当 $a\in \left(0,+\infty \right)$ 时, $∵$ 函数 $ℎ^{′}\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty \right)$ 上单调递增,令 $ℎ^{′}\left(x\right)=0$ 得 $x=−lna$ ,

(i) 若 $a\in [1,+\infty ),∴lna\leq 0$ ,此时 $h^{′}\left(x\right)\geq 0$ 在 $\left(0,+\infty \right)$ 恒成立,

$∴h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty \right)$ 上单调递增, $h\left(x\right)$ 最多有一个零点, $∴$ 舍;

(ii) 若 $a\in \left(0,1\right),−lna>0,∴ℎ^{′}\left(x\right)$ 与 $ℎ\left(x\right)$ 随 $x$ 的变化情况如下表所示

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x | $$\left(0,−lna\right)$$ | $$\left(−lna,+\infty \right)$$ |
|  |  | + |
| h(x) | 单调递减 | 单调递增 |

又 $∵ℎ\left(0\right)=a>0,\lim\_{n\to +\infty }ℎ\left(x\right)=+\infty $ ,

$∴$ 当 $ℎ\left(x\right)$ 最小值 $ℎ\left(−lna\right)=1+lna<0$ ,即 $a<\frac{1}{e}$ 时, $ℎ\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty \right)$ 上有两个不为 1 的变号零点,

即函数 $g\left(x\right)$ 在定义域内有了两个不同的极值点,不妨分别记作 $m,n\left(m<n\right)$ ,

而 $h\left(1\right)=$ ae- $1<0,∴0<m<1<n$ .

又 $∵g^{′}\left(1\right)=0,∴x=1$ 是 $g\left(x\right)$ 的第三个极值点,

综上当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时, $g\left(x\right)$ 有三个不同的极值点: $x\_{1}=m,x\_{2}=1,x\_{3}=n$ ,且 $0<m<1<n$ ,

$∵ae^{m}=m,ae^{n}=n,∴m+lna=lnm,n+lna=lnn$ ,

$∴g\left(x\_{1}\right)=g\left(m\right)=\frac{ae^{m}}{m}−m+lnm=1−m+lnm=1+lna$ ,

$g\left(x\_{2}\right)=g\left(1\right)=ae−1, g\left(x\_{2}\right)=g\left(n\right)=1−n+lnn=1+lna$ ,

$∵g\left(x\_{1}\right)⋅g\left(x\_{2}\right)⋅g\left(x\_{3}\right)\geq \frac{1}{e}−1$ ,即 (ae-1) $\left(1+lna\right)^{2}\geq \frac{1}{e}−1$ ,

令 $φ\left(x\right)=\left(ex−1\right)\left(lnx+1\right)^{2},x\in \left(0,\frac{1}{e}\right),∴φ$ ’ $\left(x\right)=\left(lnx+1\right)\left(elnx−\frac{2}{x}+3e\right),x\in \left(0,\frac{1}{e}\right)$ ,

令 $u\left(x\right)=lnx+1,v\left(x\right)=elnx−\frac{2}{x}+3e$ ,

$∵u\left(x\right),v\left(x\right)$ 均在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 单调递增,且 $u\left(\frac{1}{e}\right)=v\left(\frac{1}{e}\right)=0$ ,

$∴φ^{′}\left(x\right)\geq 0$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 恒成立, $∴φ\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 单调递增,

又 $φ\left(\frac{1}{e^{2}}\right)=\frac{1}{e}−1,∴a\geq \frac{1}{e^{2}}$ ,

综上 $a\in \left[\frac{1}{e^{2}},\frac{1}{e}\right)$ .