东莞市2024-2025学年第一学期七校联考试题

**一、单项选择题**

1．已知集合，，则（    ）

A． B． C． D．

2．已知复数满足，则（    ）

A．0 B．1 C． D．2

3．已知，满足，，，则，的夹角为（     ）

A． B． C． D．

4．已知，，则sin（*α*＋*β*）=（     ）

A． B． C． D．

5．已知一个圆锥和圆柱的底面半径和高分别相等，若圆锥的轴截面是等边三角形，则这个圆锥和圆柱的侧面积之比为（    ）

A． B． C． D．

6．古希腊毕达哥拉斯学派的“三角形数”是一列点（或圆球）在等距的排列下可以形成正三角形的数，如1，3，6，10，15，…，我国宋元时期数学家朱世杰在《四元玉鉴》中所记载的“垛积术”，其中的“落一形”锥垛就是每层为“三角形数”的三角锥的锥垛（如图所示，从上到下，顶上一层1个球，第二层3个球，第三层6个球…），若一“落一形”三角锥垛有20层，则该锥垛第18层球的个数为（    ）



A．190 B．171 C．153 D．136

7．对任意两个实数，，定义，若，，则下列关于函数的说法正确的是（    ）

A．函数是奇函数 B．函数在区间上单调递增

C．函数图象与轴有三个交点 D．函数最大值为2

8．定义在*R*上的函数满足，若且，则（    ）

A． B． C． D．与的大小不确定

1. **多项选择题**

9．甲、乙两名高中学生某学科历次测试成绩(百分制)分别服从正态分布*，*，其正态分布的密度曲线如图所示，则下列说法中正确的是（     ）



附：若随机变量*X*服从正态分布*，*则.

A．甲同学的平均成绩优于乙同学的平均成绩

B．乙同学的平均成绩优于甲同学的平均成绩

C．甲同学的成绩比乙同学成绩更集中于平均值附近

D．若，则甲同学成绩高于80分的概率约为0.1587

10．对于函数，给出下列结论，其中正确的有（ ）

A. 函数在区间上的值域为

B.函数的图象关于点对称

C. 将函数的图象向左平移个单位长度得到函数的图象

D. 曲线在处的切线的斜率为1

11．已知双曲线*C*：的左右焦点分别为，且，*A*、*P*、*B*为双曲线上不同的三点，且*A*、*B*两点关于原点对称，直线与斜率的乘积为1，则下列正确的是（     ）

A．双曲线*C*的实轴长为

B．双曲线*C*的离心率为

C．若，则三角形的周长为

D．的取值范围为

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．**

12．写出过点且与圆相切的一条直线方程：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

13．在中，若，且AB边上的中线长为2，则面积的最大值为\_\_\_\_\_\_\_.

14．已知函数为奇函数，则函数在上的最小值为 .

**四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

15．（本小题满分13分）某数学兴趣小组为研究本校学生数学成绩与语文成绩的关系，采取有放回的简单随机抽样，从学校抽取样本容量为200的样本，将所得数学成绩与语文成绩的样本观测数据整理如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 语文成绩 | 合计 |
| 优秀 | 不优秀 |
| 数学成绩 | 优秀 | 50 | 30 | 80 |
| 不优秀 | 40 | 80 | 120 |
| 合计 | 90 | 110 | 200 |

(1)根据小概率值的独立性检验，能否认为数学成绩与语文成绩有关联？

(2)在人工智能中常用表示在事件发生的条件下事件发生的优势，在统计中称为似然比.现从该校学生中任选一人，表示“选到的学生语文成绩不优秀”，表示“选到的学生数学成绩不优秀”.请利用样本数据，估计的值.

附：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

16．（本小题满分15分）如图，在四棱锥中，底面为矩形，平面为的中点．



(1)证明：平面．

(2)若平面与平面的夹角为，求的长．

17．（本小题满分15分）已知数列的前项和为，，数列是以1为公差的等差数列．

(1)求数列的通项公式；

(2)若对于任意正整数，都有，求实数的最小值.

18．（本小题满分17分）已知函数

（1）当时，求曲线在点处的切线方程；

（2）若函数有两个不同的零点，.

①求实数*a*的取值范围；

②证明：.

19．（本小题满分17分）通过研究，已知对任意平面向量，把绕其起点*A*沿逆时针方向旋转角得到向量，叫做把点*B*绕点*A*逆时针方向旋转角得到点*P*

(1)已知平面内点，点，把点*B*绕点*A*逆时针旋转得到点*P*，求点*P*的坐标：

(2)已知二次方程的图象是由平面直角坐标系下某标准椭圆绕原点*O*逆时针旋转所得的斜椭圆*C*，

（i）求斜椭圆*C*的离心率；

（ⅱ）过点作与两坐标轴都不平行的直线交斜椭圆*C*于点*M*、*N*，过原点*O*作直线与直线垂直，直线交斜椭圆*C*于点*G*、*H*，判断是否为定值，若是，请求出定值，若不是，请说明理由.

**东莞市2024-2025学年第一学期七校联考高三数学参考答案**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 答案 | D | A | B | D | C | B | C | A | BCD | AD | BCD |

1．D 2．A

3．В 【详解】因为，所以，

则，由于，所以．故选：B

4．D 【详解】因为，所以，所以，

两式相加可得：，

所以所以，解得，故选：D

5．C 【详解】设圆锥和圆柱的底面半径为，

因为圆锥的轴截面是等边三角形，所以圆锥的母线长为，则圆锥和圆柱的高为，

所以圆锥的侧面积为，圆柱的侧面积为，

所以圆锥和圆柱的侧面积之比为，故选：C．

6． B【详解】由于“三角形数”可以写为，故第层“三角形数”为，则第18层球的个数为171．

7．C 【详解】由题意可得：，

令；解得或；令；解得；

所以，即，

作出函数的图象如图：



对于选项A：由图像可知为偶函数，故选项A错误．

对于选项B：由图像可知在区间上单调递增，但．

可得在区间上不单调递增，故选项B错误．

对于选项C：由图像可知：函数图象与轴有三个交点，故选项C正确．

对于选项D：由图像可知：当时，函数最大值为1，故选项D错误．

故选：C．

8．A 【详解】因为，所以函数的图象关于直线对称，

又因为，所以在上递增，在上递减，

当时，，

当时，因为，所以，所以，所以，

综上：．故选：A

9．BCD【详解】解：由图象可知，甲的图象关于对称，乙的图象关于对称，

所以甲同学的平均成绩为75分，乙同学的平均成绩为85分，故选项B正确，A错误；

因为甲的图象比乙的图象更“高瘦”，所以甲的成绩比乙的成绩更集中于平均值左右，

则甲同学成绩的方差比乙同学成绩的方差小，故选项C正确；

若，则甲同学成绩高于80分的概率约为，故选项D正确．故选：ACD．

10．AD 【详解】由题意知，

对于A，因为，所以，则，A正确；

对于B，，故函数的图象不关于点对称，B错误；

对于C，将函数的图象向左平移个单位长度得到函数的图象，C错误；

对于D，，则，

故曲线在处的切线的斜率为1，D正确，故选：BD

11．【答案】BCD 【详解】根据题意可知，所以，设，则，将分别代入到双曲线后相减可得

代入可求解出，

对A，根据，解之可得，所以双曲线的实轴长为，故A错误；

对B，根据离心率，将代入可得，故B正确；

对C，根据，可知，则，可求得，



所以三角形的周长为，故C正确；

对D，设与双曲线联立可得，若有解，需要解之可求出或，故D正确．故选：BCD

12．，或．（写出其中一条即可）

【详解】（方法一）在直角坐标系中作图可快速得出符合条件

（方法二）点在圆外，切线有两条．

当直线的斜率存在时，设过点的切线方程为，即．

，得，

切线方程为．

当过点的直线的斜率不存在时，方程为，圆心到直线的距离等于1，符合条件．

所求的切线方程是，或．

13．

【详解】因，则．

所以，又，所以．设边上的中线为，

则，则，

所以，当且仅当时等号成立，所以

14．

【详解】令，即，解得，

因为函数为奇函数，则函数图象关于原点对称，又，

即中必有一个为1，则另一个为0，

所以，则，符合题意；

则，

所以当时，当时，

所以在上单调递减，在上单调递增，

又，所以函数在上的最小值为．故答案为：

15．【详解】（1）零假设：数学成绩与语文成绩无关．

据表中数据计算得：

根据小概率值的独立性检验，我们推断不成立，即认为数学成绩与语文成绩有关；

（2）







即估计的值为．

16．【详解】（1）连接交于点，连接，如图，



因为为的中点，为的中点，

所以．

又平面平面，

所以平面．

（2）因为平面平面，

所以．又，所以两两互相垂直，

故以为原点，所在直线分别为轴，轴，轴，建立空间坐标系如图所示，



设，则，

所以

显然为平面的一个法向量．

设平面的一个法向量为，

则，即

令，得

由平面与平面的夹角为得，

解得或（舍去），即．

17．【详解】（1）数列是以1为公差的等差数列，且，

，

，

当时，．

当时，上式也成立．



（2）由

则







而

所以，即的最小值为

18．【详解】解：（1）当时，，，

所以，

所以曲线在点处的切线方程是

（2）函数有两个不同的零点，

等价于方程有两个不同实根，

①令，则，

所以在上单调递增，在上单调递减，

由于，当时，；当，

的大致图象如图所示：（此处图象正确直接得2分）



所以，当，即时，

函数有两个不同的零点．

②证明：不妨设，

两式相加得，两式相减得，

所以．

要证，只需证即证

设，令，则，

所以函数在上单调递增，且，

所以，即．

19．【详解】（1）由已知可得，则，

设，则，

所以，即点P的坐标为；

（2）①由与交点为和，则，

由与交点为和，则，

所以；

②法一：设直线

与斜椭圆联立：，

有，

，





设直线，代入斜椭圆，



有，

，

故．

法二：将粗圆顺时针旋转，由已知可得椭圆方程为，点Q旋转后的坐标为，

当直线旋转后斜率不存在时，，

当直线旋转后斜率存在时，设直线旋转后为，旋转后，

与椭圆方程联立，即，可得，

，

设直线旋转后为，代入粗圆方程中，

有，

．

综上所述，．

