**2024级高一年级12月学情检测试题**

**数学**

**一､选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知集合，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据补集、交集的定义计算可得.

【详解】因为，

所以，则.

故选：C

2. 已知函数在区间上的图象是连续不断的，设，在区间中至少有一个零点，则是的（ ）

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据零点存在性定理及充分条件、必要条件的定义判断即可.

【详解】因为函数在区间上的图象是连续不断的，

若，根据零点存在性定理可知在区间中至少有一个零点，即成立，故充分性成立；

若在区间中至少有一个零点，不一定得到，

如，令，即，解得，，

即在区间中存在两个零点、，显然，，故必要性不成立；

所以是的充分不必要条件.

故选：A

3. 下表是某次测量中两个变量的一组数据,若将表示为关于的函数,则最可能的函数模型是

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | 0.63 | 1.01 | 1.26 | 1.46 | 1.63 | 1.77 | 1.89 | 1.99 |

A. 一次函数模型 B. 二次函数模型 C. 指数函数模型 D. 对数函数模型

【答案】D

【解析】

【详解】对于，由于均匀增加，而值不是均匀递增，不是一次函数模型；对于，由于该函数是单调递增，不是二次函数模型；对于，过不是指数函数模型，故选D.

4. 函数的零点个数是（ ）

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】分段令，求出方程的解，即可判断.

【详解】因为，

当时，令，即，解得，（舍去）；

当时，令，即，即，解得；

综上可得函数的零点为，共个.

故选：B

5. 已知，则的最小值是（ ）

A. 9 B.  C. 4 D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】利用乘“1”法及基本不等式计算可得.

【详解】因为，

所以，

当且仅当，即时取等号.

故选：B

6. 若存在满足，则的取值范围是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】参变分离可得存在满足，令，，利用函数的单调性求出，即可得解.

【详解】因为存在满足，

即存在满足，

令，，

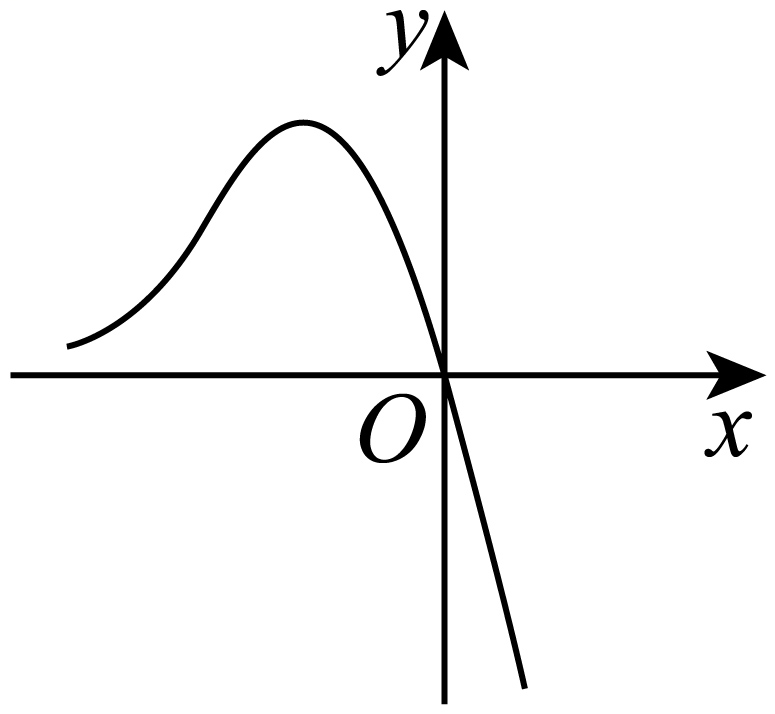
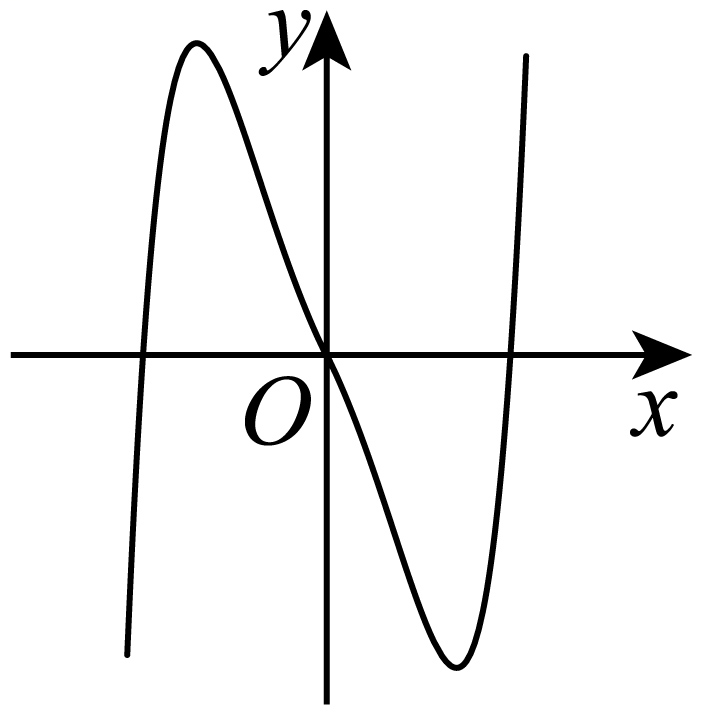
因为与在上单调递增，

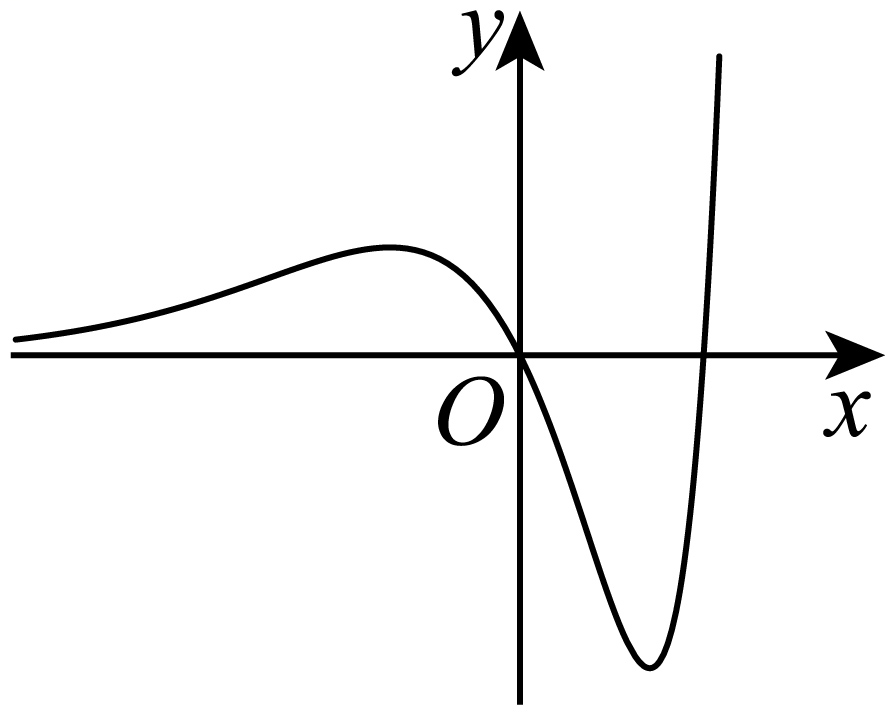
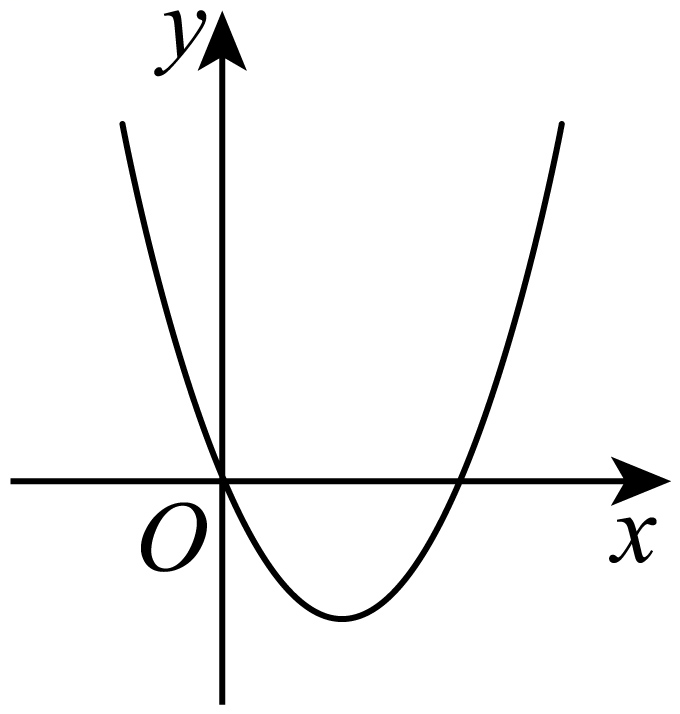
所以在上单调递增，所以，

所以，即的取值范围是.

故选：A

7. 函数的图象大致是（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次函数的性质，可得函数与零的大小关系，取特殊点进行比较，可得答案.

【详解】令，令，解得或，

由，且，可得下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | + |

由，，，

则，，故C正确.

故选：C

8. 已知函数，关于的方程有8个不相等的实数根，则的取值范围是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

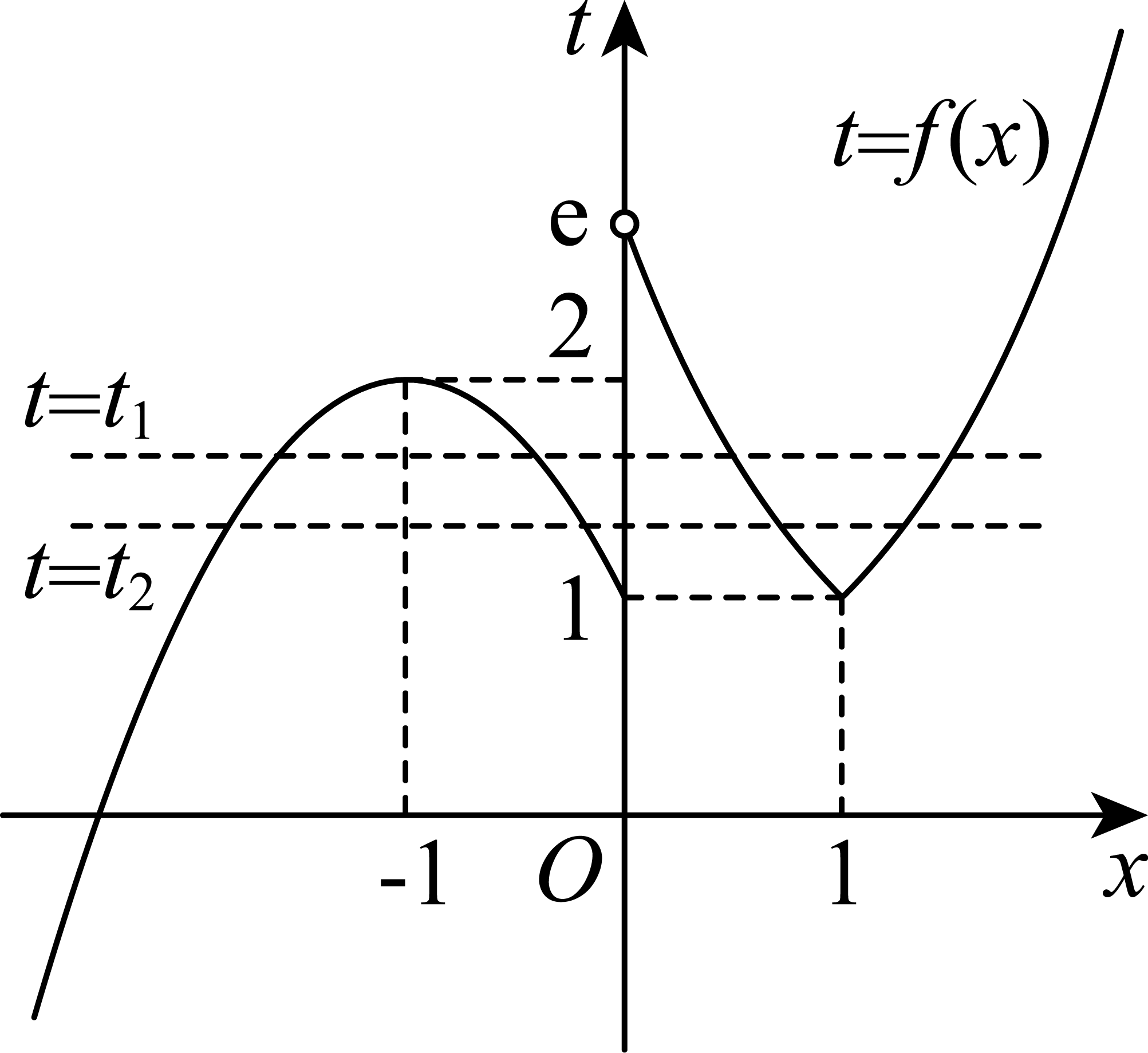
【解析】

【分析】令，利用图象可得知，关于的二次方程的两根、，然后利用二次函数的零点分布得出关于实数的不等式组，解出即可.

【详解】令，由，得，

设关于的二次方程的两根分别为、，

如下图所示：



由于关于的方程有8个不等的实数根，

则，，设，

则，解得.

因此，实数的取值范围是.

故选：D.

**二､多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.**

9. 下列说法正确的是（ ）

A. 命题“，”否定是“，”

B. 命题“，”是真命题

C. “”是“”的充分条件

D. “”是“”的充分不必要条件

【答案】ABD

【解析】

【分析】利用存在量词命题的否定判断A；判断存在量词命题的真假，判断B；

利用充分条件的定义判断C；利用充分不必要条件的定义判断D.

【详解】对于A，由存在量词命题的否定形式知命题正确，A正确；

对于B，当时，成立，B正确；

对于C，取，，满足，而，不是充分性条件，C错误；

对于D，能推出，而不能推出，“”是“”充分不必要条件，D正确.

故选：ABD

10. 下列函数中，既是奇函数，又在区间上单调递增的有（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据奇偶性的定义及复合函数的单调性一一判断即可.

【详解】对于A：函数定义域为，且为奇函数，

但是函数在上单调递减，在上单调递增，故A错误；

对于B：函数定义域为，

且，所以为奇函数，

又与均在区间上单调递增，所以在区间上单调递增，故B正确；

对于C：函数的定义域为，且，

所以为奇函数，又，

因为与均在区间上单调递增，所以在区间上单调递增，故C正确；

对于D：函数的定义域为，

且，

所以为奇函数，

又与均在区间上单调递增，

所以在区间上单调递增，故D正确；

故选：BCD

11. 已知是函数的零点（其中为自然对数的底数），则下列说法正确的有（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】ABD

【解析】

【分析】确定函数单调递增，计算 ，得到A正确，变换得到B正确，计算，C错误，变换，D正确，得到答案.

【详解】对选项A：在上单调递增，

 ，，故函数有唯一零点，A正确；

对选项B：，即，，

即，B正确；

对选项C：，，C错误；

对选项D：，，

，D正确；

故选：ABD

**三､填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.**

12. 已知函数，则的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】##

【解析】

【分析】根据分段函数解析式计算可得.

【详解】因为，所以，

所以.

故答案为：

13. 物体在常温下的温度变化可以用牛顿冷却规律来描述：设物体的初始温度是，经过一段时间后的温度是，则，其中表示环境温度，称为半衰期.现有一杯用热水冲的速溶咖啡，放在的房间中，如果咖啡降温到需要，那么降温到，需要的时长为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据题意得出函数关系，求出*h*，然后即可得出答案.

【详解】由题得，

，代入得，解得，

所以，当时，解得，

即降温到，需要的时长为.

故答案为：.

14. 我们知道，函数的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数为奇函数，有同学发现可以将其推广为：函数的图象关于点成中心对称图形的充要条件是函数为奇函数.

（1）请写出函数图象的对称中心\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

（2）利用题目中的推广结论，若函数的图象关于点对称，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】 ①.  ②. 6

【解析】

【分析】（1）根据推广结论，将函数通过设对称中心，然后利用为奇函数这一条件求出对称中心.

（2）已知函数图象关于点对称，根据推广结论可得到关于和的等式，从而求出的值.

【详解】（1）设函数的对称中心为.

根据推广结论，函数为奇函数.

又因为奇函数时，即.

化简，根据对数运算法则则.

因为任意该等式都成立，则.解得，将代入.

得，解得.

所以函数图象的对称中心为.

（2）因为函数的图象关于点对称.根据结论，为奇函数.

对于奇函数，，令，则，化简得 ②.

又因为为奇函数时，展开，

即

即

即

根据可得，化简得.

将代入②式得.

所以.

故答案为：；6.

**四､解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明､证明过程或演算步骤.**

15. 计算：

（1）求值：计算

（2）求值：.

（3）已知，求值：.

【答案】（1）

（2）

（3）

【解析】

【分析】（1）根据指数幂的运算法则计算可得；

（2）根据对数的运算性质计算可得；

（3）首先求出，接着求出，最后代入计算可得.

【小问1详解】





；

【小问2详解】









；

【小问3详解】

因为，

所以，即，

则，所以，

所以.

16. 已知

（1）求证：在上存在零点；

（2）若对任意的，不等式恒成立，求实数的取值范围.

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）首先判断函数的单调性，结合零点存在性定理证明即可；

（2）结合（1）的单调性可知对任意的，不等式恒成立，参变分离，结合基本不等式计算可得，需注意.

【小问1详解】

函数定义域为，

又与均在上单调递增，

所以在上单调递增，且为连续函数，

又，，

所以，所以在上存在唯一零点，

即在上存在零点；

【小问2详解】

由（1）可知在上单调递增，

因为对任意的，不等式恒成立，

所以对任意的，不等式恒成立，

即对任意的，不等式恒成立，

又，当且仅当，即时取等号，

又，所以，

所以，即实数的取值范围为.

17. 已知函数是偶函数，.

（1）求实数的值；

（2）当时，求函数的零点；

（3）若的最小值为4，求实数的值.

【答案】（1）

（2）

（3）

【解析】

【分析】（1）根据偶函数的定义恒成立来求解的值.

（2）令，先求出的表达式，再代入，结合换元法解二次方程，最后指对互化，求值即可.

（3）先将代入得到表达式，再分类讨论，结合二次函数的性质求的值.

【小问1详解】

因为是偶函数，所以恒成立.

即，，则.

移项得到，即.

提取公因式得到，

因为不恒为，所以.

【小问2详解】

当时，，则.

由（1）知，令，即.

设，则.

分解因式得，因为，所以，即，解得，

即函数的零点为；

【小问3详解】

由（1）知，所以，则.

设，则.

当即时，在处取得最小值，，解得.

当即时，在处取得最小值，，此方程无解.

综上所得，.

18. 随着城市地铁建设的持续推进，市民的出行也越来越便利，根据大数据统计，某条地铁线路运行时，发车时间间隔（单位：分钟）满足: ，平均每班地铁的载客人数 （单位：人）与发车时间间隔近似地满足函数关系：，

（1）若平均每班地铁的载客人数不超过1560人，试求发车时间间隔的取值范围；

（2）若平均每班地铁每分钟的净收益为（单位：元），则当发车时间间隔为多少时，平均每班地铁每分钟的净收益最大？并求出最大净收益.

【答案】（1）；（2），最大值为260元.

【解析】

【分析】

（1）根据题意即求解不等式；

（2）根据题意求出的解析式，利用函数单调性或基本不等式求最值.

【详解】（1）当，超过1560，所以不满足题意；

当，载客人数不超过1560，

即，解得或，由于

所以；

（2）根据题意，

则

根据基本不等式，，当且仅当，即时取得等号，所以，

即当时，平均利润的最大值为260元，

当时，单调递减，，

综上所述，最大值为260元.

【点睛】此题考查函数模型的应用，关键在于根据题目所给模型，准确求解不等式，或根据函数关系求出最值，基本不等式求最值注意等号成立的条件.

19. 若函数在区间上有意义，对于给定的，存在，使得，则称为上的“阶等值函数”.

（1）判断，是否是上的“阶等值函数”，并说明理由；

（2）若二次函数满足，证明：是上的“阶等值函数”；

（3）证明：是上的“阶等值函数”，并求的最大值.

【答案】（1）不是，证明见解析；

（2）证明见解析； （3）证明见解析，的最大值为.

【解析】

【分析】（1）根据“阶等值函数”的定义，判断在上是否存在使得即可.

（2）根据题目中所给的定义，结合二次函数的对称性，可得答案；

（3）由题意代入端点值，求得参数值，利用反证法，结合指数函数的性质，可得答案.

【小问1详解】

假设是上的“阶等值函数”.

则存在，使得，故.

又因为是单调递增函数，而，所以，矛盾，

所以不是上的“阶等值函数”.

【小问2详解】

证明：因为是二次函数，，

所以的对称轴为，

若存在，使得，则，

解得，所以是上的“阶等值函数”．

【小问3详解】

证明：因为，

当时，，令，得，

所以，

所以是上的“阶等值函数”，且的一个值为，

下面证明的最大值为：

假设存在，使得是上的“阶等值函数”，

则存在，使得，

因为，所以在上单调递减，

所以，

因为，所以，即，

又，所以，矛盾，

所以的最大值为.

【点睛】方法点睛：新定义问题的方法和技巧：

（1）可通过举例子的方式，将抽象的定义转化为具体的简单的应用，从而加深对信息的理解；

（2）发现新信息与所学知识的联系，并从描述中体会信息的本质特征与规律；

（3）如果新信息是课本知识的推广，则要关注此信息与课本中概念的不同之处，以及什么情况下可以使用书上的概念.