

合肥一中 2025 届高三年级上学期阶段性诊断检测卷
数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | 2x - 4 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 5\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $\{2, 3, 4, 5\}$ B. $\{3, 4, 5\}$ C. $(2, 5]$ D. $[2, 5]$

答案: B

【解析】由题意 $A = (2, +\infty)$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 因此 $A \cap B = \{3, 4, 5\}$.

2. $\frac{z}{i} = 1 + i$, 则 $\bar{z} = (\quad)$

- A. $-1 - i$ B. $-1 + i$ C. $1 + i$ D. $1 - i$

答案: A

【解析】

$$z = -1 + i$$

$$\bar{z} = -1 - i$$

3. 已知 $\vec{a} = (0, 1)$, $\vec{b} = (3, 3)$, 若满足 $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$, 且 $\vec{c} \perp \vec{b}$, 则 $t = (\quad)$

- A. $\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{6}$ D. 0

答案: C

【解析】 $\vec{c} = (0, 1) + t(3, 3) = (3t, 1 + 3t)$

$$\text{所以 } \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

$$9t + 9t + 3 = 0$$

$$\text{所以 } t = -\frac{1}{6}$$

4. 已知一圆锥高为 2, 母线长为 $2\sqrt{2}$. 若用一平面截圆锥得到的圆台体积是圆锥的 $\frac{7}{8}$, 则圆台的侧面积为 ()

- A. $6\sqrt{2}\pi$ B. $4\sqrt{2}\pi$ C. $3\sqrt{2}\pi$ D. $\sqrt{2}\pi$

答案: C

【解析】由题意: 圆锥底面半径 $R = 2$. 设圆台的高为 h , 则截去的小圆锥的高为 $2 - h$, 且小圆锥的体积是大圆锥的 $\frac{1}{8}$, 则 $8V_{\text{小圆锥}} = V_{\text{大圆锥}}$ 有: $8 \times \frac{1}{3} \times (2 - h)^2 \pi \times (2 - h) = \frac{1}{3} \times 2^2 \pi \times 2$, 即 $(2 - h)^3 = 1$, 解得 $h = 1$.

易知圆台上底面的半径 $r=1$ ，则圆台的母线 $l=\sqrt{2}$ ， $S=\pi l(R+r)=\pi\times\sqrt{2}\times(2+1)=3\sqrt{2}\pi$ 。

5. 已知 $\theta\in(-\frac{\pi}{2},0]$ ， $\tan\theta=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$ ，则 $\tan 2\theta=$ ()

A. 1 B. -1 C. 0 D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

答案: B

【解析】 $\tan\theta=\frac{1+\tan\theta}{\tan\theta-1}=-\tan(\theta+\frac{\pi}{4})=\tan(-\theta-\frac{\pi}{4})$

则 $\theta=-\theta-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

所以， $\theta=-\frac{\pi}{8}$ 从而 $\tan 2\theta=-1$

6. 已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足 $\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{12}=1, (x_2-12)^2+y_2^2=1$ ，则 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 的最小值为 ()

A. 96 B. 81 C. $96-8\sqrt{6}$ D. $97-8\sqrt{6}$

答案: D

【解析】 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. 注意到: $|PQ|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

点 Q 在圆 $C: (x-12)^2+y^2=1$ 上, 故 $|PQ|\geq|PC|-1$.

$$|PC|=\sqrt{(x_1-12)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-12)^2+(3x_1^2-12)}=\sqrt{4x_1^2-24x_1+132}=\sqrt{4(x_1-3)^2+96}$$

$\because x_1\in(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$

\therefore 当 $x_1=3$ 时, PC 取最小值, 为 $4\sqrt{6}$

$\therefore |PQ|\geq 4\sqrt{6}-1$

$\therefore (x_1-y_2)^2+(x_2-y_1)^2\geq (4\sqrt{6}-1)^2=97-8\sqrt{6}$.

7. 已知 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ ， $\omega>0$ ， $f(x)=\sin^2(\omega x+\varphi)-\sin(\omega x+\varphi)\cos(\omega x+\varphi)$ 为偶函数，且

$g(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有 3 个零点，则 ω 的取值范围为 ()

A. $[\frac{23}{16}, \frac{31}{16})$ B. $(\frac{23}{16}, \frac{31}{16}]$ C. $[\frac{21}{16}, \frac{29}{16})$ D. $(\frac{21}{16}, \frac{29}{16}]$

答案: A

【解析】 $f(x)=\frac{1-\cos(2\omega x+2\varphi)}{2}-\frac{1}{2}\sin(2\omega x+2\varphi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2\omega x+2\varphi+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$

所以 $\varphi=\frac{\pi}{8}$

从而 $g(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{8})$, $\omega x + \frac{\pi}{8} \in [\frac{\pi}{8}, 2\pi\omega + \frac{\pi}{8}]$

从而 $3\pi \leq \omega x + \frac{\pi}{8} < 4\pi$

即 $\omega \in [\frac{23}{16}, \frac{31}{16})$.

8. 已知函数 $f(x) = e^x(ax-1) - x + 2$, 若存在唯一的整数 x_0 , 使 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是 ()

A. $[\frac{1}{4} + \frac{1}{2e^4}, \frac{1}{3e^3} + \frac{1}{3})$

B. $(3e-1, 2e^2 - \frac{1}{2}]$

C. $[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}) \cup (3e-1, 2e^2 - \frac{1}{2}]$

D. $[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}) \cup [\frac{1}{4} + \frac{1}{2e^4}, \frac{1}{3e^3} + \frac{1}{3}]$

【答案】C

【解析】 $f'(x) = e^x(ax + a - 1) - 1$, $f''(x) = e^x(ax + 2a - 1)$.

1、当 $a > 0$ 时, $f''(x)$ 有零点 $x = \frac{1-2a}{a}$, 则

$$x > \frac{1-2a}{a}, f''(x) > 0, f'(x) \nearrow; x < \frac{1-2a}{a}, f''(x) < 0, f'(x) \searrow.$$

$$\text{而 } f'(\frac{1-2a}{a}) = -ae^x - 1 < 0.$$

(1) 当 $0 < a < 1$ 时, $x < 0$, $f(x) > ax - 1 - x + 2 = (a-1)x + 1 > 0$

① 当 $\frac{1}{2} \leq a < 1$ 时, $f(2) = e^2(2a-1) \geq 0$, $f'(2) = e^2(3a-1) - 1 > \frac{e^2}{2} - 1 > 0$

则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的极值点 $0 < x_2 < 2$. 又 $f(0) < 0$, 故 $f(1) < 0$ 得 $\frac{1}{2} \leq a < 1 - \frac{1}{e}$

② 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时: $f(2) < 0$, $f(1) > 0$, 则 $a > 1 - \frac{1}{e} > \frac{1}{2}$, 矛盾.

(2) 当 $a > 1$ 时, $f'(x) = e^x(ax + a - 1) - 1$, 当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$;

又 $\frac{1-2a}{a} < -1$, 而 $f'(1) = e(2a-1) - 1 > e-1 > 0$, 则 $f'(x)$ 的较大零点 $x_0 < 1$.

而 $f(0) = 1$, 则 $f(-2) \geq 0$, $f(-1) < 0$ 得: $3e-1 < a \leq 2e^2 - \frac{1}{2}$

2、当 $a < 0$ 时, $f''(x)$ 有零点 $x = \frac{1-2a}{a}$, 则

$$x > \frac{1-2a}{a}, f''(x) > 0, f'(x) \nearrow; x < \frac{1-2a}{a}, f''(x) < 0, f'(x) \searrow.$$

则进一步可知, $f(x)$ 在定义域上的单调性是先单调递增后单调递减再单调递增, 矛盾.

3、当 $a = 0$ 时, $f(x) = -e^x - x + 2$, 定义域上单调递减, 矛盾.

综上所述, $a \in [\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}) \cup (3e-1, 2e^2 - \frac{1}{2}]$.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目的要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 设 A, B, C 是三个随机事件，则下列说法正确的是 ()

A. 若 A, B 互斥，则 $P(A) + P(B) = 1$

B. 若 $A \subseteq B$ ，则 $P(A) \leq P(B)$

C. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

D. 若 A, B 独立，则 $P(\overline{AB}) = [1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)]$

答案：BCD

【解析】A 选项，若 A, B 互斥，则 $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$ 未必为 1，

B. 正确（教材必修二 240 页性质 5）

C. 正确（教材必修二 241 页性质 6）

D. 若 A, B 独立，则 $\overline{A}, \overline{B}$ 独立，故正确（教材必修二 247 页探究）

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x+2|, & x \leq 0 \\ |\log_3 x|, & x > 0 \end{cases}$ ，若关于 x 方程 $f(x) = t$ 有四个不同的解 x_1, x_2, x_3, x_4 ，且

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ，则 $\frac{1}{x_3 x_4} - x_4(x_1 + x_2)$ 的可能取值为 ()

A. 2 B. 8 C. 16 D. 32

答案： $x_1 + x_2 = -4, x_3 x_4 = 1, \frac{1}{x_3 x_4} - x_4(x_1 + x_2) = 5x_4$ ，结合图象知 $x_4 \in (1, 9)$ ，故选：BCD

11. 如图所示，两个正方形 $ABCD, ABEF$ 的边长为 a ，两个动点 M, N 分别在正方形对角线 AE 和 BD 上，

BD 中点为 O 且 $ME = DN, MN = a$. 则 ()

A. M, N 运动过程中，不存在 $MN \perp AB$

B. 若平面 $MAD \cap$ 平面 $BEC = l, l \perp BE$ ，则平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$

C. 当 N 在线段 DO 上运动时(不包括端点)，二面角 $A-MN-B$ 可以为直二面角

D. 当 N 在线段 BO 上运动时(不包括端点)，四面体 $M-ABN$ 的外接球表面积的最小值为 $\frac{7}{8}a^2\pi$.

答案: BCD

【解析】

对于 A 选项: M, N 运动到 midpoint 时, 有 $MN \perp AB$, 则 A 选项错误;

对于 B 选项: 平面 MAD (即平面 MAE) \cap 平面 $BEC = l$, 由线面平行的性质定理: $l \parallel BC$, $BC \perp AB$,

则 $l \perp AB$. 又 $l \perp BE$, $BE \cap AB = B$, 则 $l \perp$ 平面 $ABEF$, 即

$BC \perp$ 平面 $ABEF$, 则平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$, 则 B 选项正确.

对于 C、D 选项: 联结 BM, AN , 则四面体 $AMBN$ 是一个对棱相等的四面体, 故二面角 $A-MN-B$ 与两个正方形平面的二面角大小相等.

当 N 在线段 DO 上运动时 (不包括端点), 在 O 点处二面角为 180° , 在 D 点处二面角大小为 0° , 则在变化过程中, 二面角 $A-MN-B$ 可以为直二面角. 则 C 选项正确.

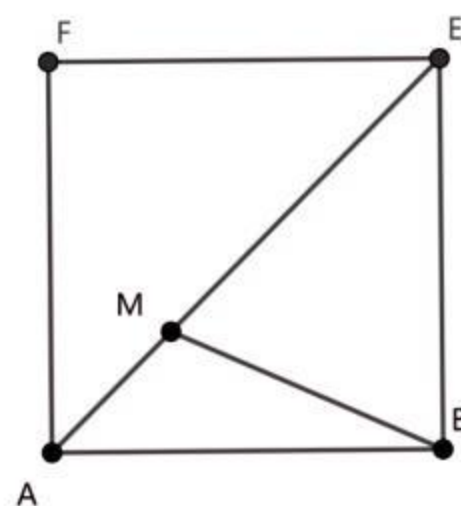
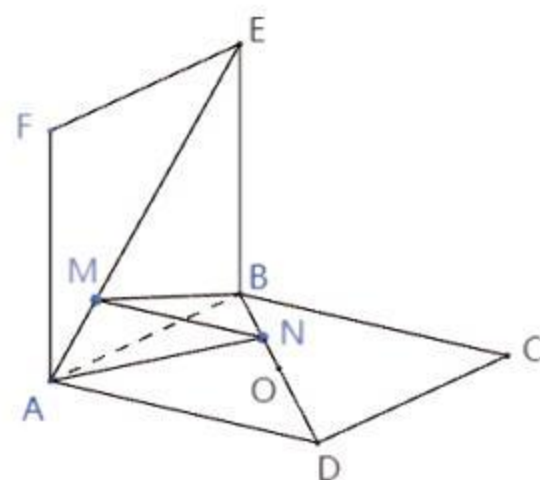
当 N 在线段 BO 上运动时 (不包括端点), 四面体 $M-ABN$ 的外接球记为

R , 则 $2 \times (2R)^2 = BM^2 + AM^2 + MN^2$, 记 $AM = x$, 则

$$\begin{aligned} BM^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} MA \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ME \right)^2 = \frac{1}{2} (MA^2 + (AE - AM)^2) \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + (\sqrt{2}a - x)^2) = x^2 - \sqrt{2}ax + a^2 \end{aligned}$$

$$\text{则 } 8R^2 = x^2 - \sqrt{2}ax + a^2 + x^2 + a^2 = 2x^2 - \sqrt{2}ax + 2a^2 = 2 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}a \right)^2 + \frac{7}{4}a^2$$

$$\text{故 } S_{\text{四面体 } AMBN} = 4\pi R^2 = \frac{\pi}{2} \left[2 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}a \right)^2 + \frac{7}{4}a^2 \right] \geq \frac{7}{8}\pi a^2. \text{ 则 D 选项正确.}$$



第 II 卷 (共 92 分)

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 若 $f(x) = 2\sin 3x + \cos 3x - 1$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为_____

【解析】 $\frac{2\pi}{3}$

13. 函数 $f(x) = ax^2 + 2x - 4a - 6$ 在 $(-2, 2)$ 上有两个零点, 则 a 的取值范围是_____

$$a < -\frac{\sqrt{5}+3}{4}$$

【解析】函数 $f(x) = ax^2 - 2x - 4a - 6$ 的图象过定点 $(-2, -2), (2, -10)$, 则
$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 2^2 - 4a(-4a - 6) > 0, \\ -2 < -\frac{2}{2a} < 2 \end{cases}$$

解得: $a < -\frac{\sqrt{5}+3}{4}$

14. 已知 n 为正整数, 有穷数列 $a_k = 2^k (1 \leq k \leq n)$ 中所有可能的乘积 $a_i a_j (1 \leq i \leq j \leq n)$ 的和记为 T_n . 例如, 当

$n=3$ 时, $T_3 = a_1^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2 = 140$. 数列 $\left\{ \frac{2^n}{T_n} \right\}$ 的前 n 项和为_____.

【解析】

$$\begin{aligned} T_n &= (2^{1+1} + 2^{1+2} + \dots + 2^{1+n}) + (2^{2+2} + 2^{2+2} + \dots + 2^{2+n}) + \dots + (2^{n-1+n-1} + 2^{n-1+n}) + 2^{n+n} \\ &= 2^{n+2} - 2^2 + 2^{n+3} - 2^4 + \dots + 2^{2n} - 2^{2n-2} + 2^{2n+1} - 2^{2n} = (2^{n+2} + 2^{n+3} + \dots + 2^{2n+1}) - (2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2n}) \\ &= 2^{2n+2} - 2^{n+2} - 4 \cdot \frac{2^{2n} - 1}{4 - 1} = 2^{n+2}(2^n - 1) - \frac{4}{3}(2^n + 1)(2^n - 1) = (2^n - 1) \left(2^{n+2} - \frac{4}{3}2^n - \frac{4}{3} \right) = \frac{4}{3}(2^n - 1)(2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{2^n}{T_n} = \frac{3}{4} \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right), \text{ 故前 } n \text{ 项和 } S_n = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2^1 - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分, 解答应写出必要的证明过程及验算步骤.

15. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应的边为 a, b, c . 满足 $c \cos B - b \cos C = a - b$, 且 $a = 3$.

- (1) 求角 C 的大小;
- (2) 求 b 取值范围.

【解析】(1) 由 $c \cos B - b \cos C = a - b$, 有

$$\sin C \cos B - \sin B \cos C = \sin A - \sin B$$

$$\sin C \cos B - \sin B \cos C = \sin(B + C) - \sin B$$

$$-\sin B \cos C = \sin B \cos C - \sin B$$

由 $\sin B \neq 0$

所以 $\cos C = \frac{1}{2}$, $C \in (0, \frac{\pi}{2})$ 5 分

所以 $C = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 由正弦定理有

$$\frac{3}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\text{即 } b = 3 \frac{\sin B}{\sin A} = 3 \frac{\sin(A + \frac{\pi}{3})}{\sin A} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{3} \frac{1}{\tan A} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

由于锐角三角形, 则有

$$0 < A < \frac{\pi}{2}, 0 < \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{即 } \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\tan A \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty) \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } b \in (\frac{3}{2}, 6) \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 3)$, 焦距为 4, 过点 $M(-1, 0)$ 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 N .

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若 $\triangle PMN$ 的面积为 $\frac{9}{7}$, 求直线 l 的方程.

【解析】(1) $\because P(2, 3)$ 在椭圆 C 上

$$\therefore \frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$$

\because 椭圆 C 的焦距为 4,

$$\therefore a^2 = b^2 + 4,$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + 4 \\ \frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 12 \end{cases}$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线的方程为 $y = k(x + 1)$.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ y = k(x+1) \end{cases}$$

$$3x^2 + 4k^2(x+1)^2 - 48 = 0$$

$$(4k^2 + 3)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 48 = 0$$

.....7 分

$$x_1 + x_2 = -\frac{8k^2}{4k^2 + 3}$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2k = -\frac{8k^3}{4k^2 + 3} + 2k = \frac{6k}{4k^2 + 3} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore N\left(-\frac{4k^2}{4k^2 + 3}, \frac{3k}{4k^2 + 3}\right)$$

直线 PM 的方程为 $x - y + 1 = 0$

$$\text{点 } N \text{ 到直线 } PM \text{ 的距离 } d = \frac{\left| -\frac{4k^2}{4k^2 + 3} - \frac{3k}{4k^2 + 3} + 1 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{|3k - 3|}{\sqrt{2}(4k^2 + 3)} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot |PM| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|3k - 3|}{\sqrt{2}(4k^2 + 3)} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{9}{7}$$

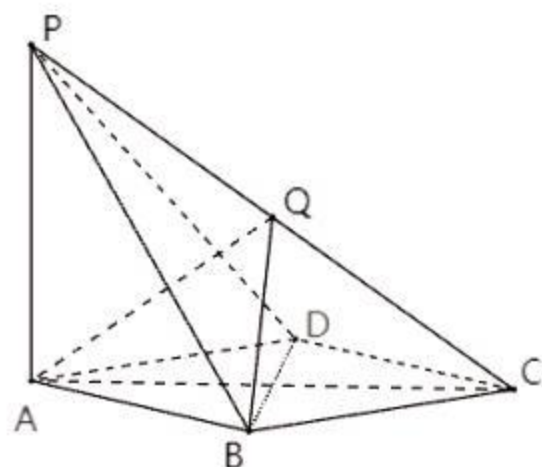
$$\text{解得 } k = -1 \text{ 或 } \frac{1}{8} \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

所以直线 l 的方程为 $x + y + 1 = 0$ 或 $x - 8y + 1 = 0$15 分

17. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形， $PA \perp AC$ ， $BC \perp BP$ ， $PA = 2\sqrt{2}$ ， $AC = 4$.

(1) 求证： $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 若 Q 为 PC 上一点， $QA = QB$ ，且二面角 $Q-AB-D$ 为 45° ，求 Q 到平面 PDB 的距离.



【解析】

(1) 证明: $\because BC \perp BP, BC \perp AB, AB \cap BP = B$

$\therefore BC \perp$ 平面 ABP , 则 $BC \perp PA$ 4 分

$\because PA \perp AC, PA \perp BC, AC \cap BC = C$

$\therefore PA \perp$ 平面 $ABCD$6 分

(2) 作 $QO \perp AC$, 垂足为 O , 则易知 $\triangle QOA \cong \triangle QOB$, 即得 $OA = OB$.

取 AB 中点 E , 连接 OE 、 EQ , 则 $OE \perp AB, EQ \perp AB$.

则二面角 $Q-AB-D$ 的平面角为 $\angle OEQ = 45^\circ$, 即 $OQ = OE$9 分

又 $BC \perp AB$, 则 $OE \parallel BC$, 即得 O 为 AC 中点, 故 Q 为 PC 中点.

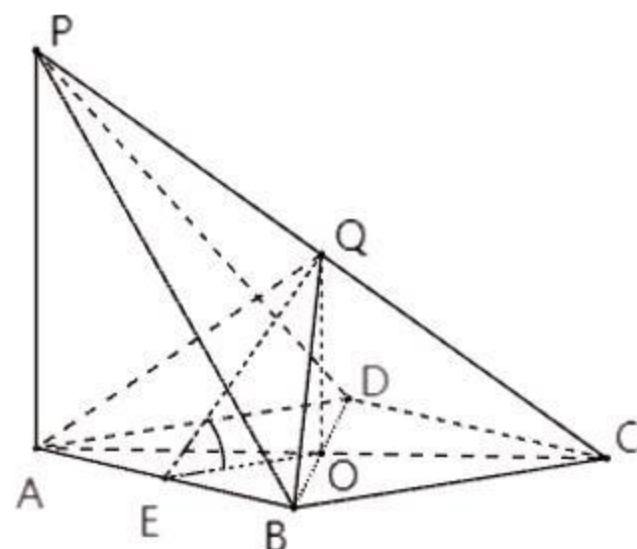
则 $OE = OQ = \frac{1}{2}PA = \sqrt{2}, BC = 2\sqrt{2}$, 则 $AB = 2\sqrt{2}$12 分

$\because Q$ 到平面 PDB 的距离是 C 到平面 PDB 的距离的一半, 则设 Q 到平面 PDB 的距离为 d

$$\therefore V_{P-BCD} = V_{C-PBD} \text{ 即 } \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times 2d \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2$$

$$\text{故 } d = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{15 分}$$

(采用建系方法, 按照步骤酌情给分)



18. 已知函数 $f(x) = a \sin(x-1) - x + \frac{1}{x} + 1 (x > 0)$, 1 是 $f(x)$ 的一个极值点.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 判断函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点个数, 并加以证明.

(3) 证明: $1 - \frac{1}{n+1} < \sum_{i=1}^n \sin \frac{1}{i^2} < 2$. 其中 $n \in \mathbb{N}^*$

【解析】: (1) 由 $f(x) = a \sin(x-1) - x + \frac{1}{x} + 1 (x > 0)$,

$$\text{则 } f'(x) = a \cos(x-1) - 1 - \frac{1}{x^2} (x > 0),$$

因为 1 为 $f(x)$ 的一个极值点,

所以 $f'(1) = a \cos(1-1) - 1 - \frac{1}{1^2}$, 所以 $a = 2$2 分

当 $a = 2$ 时, $f'(x) = 2 \cos(x-1) - 1 - \frac{1}{x^2} (x > 0)$,

当 $0 < x < 1$ 时, 因为函数 $f'(x) = 2 \cos(x-1) - 1 - \frac{1}{x^2} (x > 0)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,

所以 $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减;

当 $1 < x < \frac{\pi}{2} + 1$ 时, $g(x) = 2 \cos(x-1) - 1 - \frac{1}{x^2}$, 则 $g'(x) = -2 \sin(x-1) + \frac{2}{x^3}$,

因为函数 $g'(x)$ 在 $(1, \frac{\pi}{2} + 1)$ 上单调递减, 且 $g'(1) = 2 > 0$, $g'(\frac{\pi}{2} + 1) < 0$,

由零点存在定理, 存在 $x_0 \in (1, \frac{\pi}{2} + 1)$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

且当 $x \in (1, x_0)$ 时, $g'(x) > 0$, 即 $f'(x)$ 单调递增,

又因为 $f'(1) = 0$,

所以 $\forall x \in (1, x_0)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增;

综上所述, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(0, x_0)$ 上单调递增,

所以 1 是 $f(x)$ 的一个极值点, 故 $a = 2$ 5 分

(2) ①由 (1) 易得 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2} + 1)$ 上无零点;

当 $x \in (\frac{\pi}{2} + 1, \pi + 1)$ 时, $f'(x) = 2 \cos(x-1) - 1 - \frac{1}{x^2} < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2} + 1, \pi + 1)$ 单减,8 分

又 $f(\frac{\pi}{2} + 1) > 0$, $f(\pi + 1) < 0$,

由零点存在定理, 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}+1, \pi+1)$ 上存在唯一零点;

当 $x \geq \pi+1$ 时, $f(x) < 0$, 此时函数无零点;

综上所述, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点.11 分

②由①可得 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{4})$ 有

即 $2\sin x - x + \frac{1}{x+1} > 1$, 所以 $\sin x > \frac{1}{2}\left(x+1-\frac{1}{x+1}\right)$.

令 $x = \frac{1}{k^2} (k \geq 2)$, 则 $\sin \frac{1}{k^2} > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1}\right) > \frac{1}{k^2+1} > \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$,

所以 $\sum_{k=2}^n \sin \frac{1}{k^2} > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$,

又 $\sin \frac{1}{1^2} = \sin 1 > \frac{1}{2}$, 所以当 $n \geq 2$ 时, 有

$\sin\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) > 1 - \frac{1}{n+1}$ 14 分

设 $h(x) = \sin x - x$,

则 $h'(x) = \cos x - 1 < 0$,

所以函数 $h(x) = \sin x - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

则 $h(x) = \sin x - x < h(0) = 0$,

即 $\sin x < x$,

所以当 $n \geq 2$ 时, 有

$\sin \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$,

又 $\sin \frac{1}{1^2} = \sin 1 < 1$, 综上, $\sum_{i=1}^n \sin \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n+1} < 2$

所以 $1 - \frac{1}{n+1} < \sum_{i=1}^n \sin \frac{1}{i^2} < 2$

综上, $1 - \frac{1}{n+1} < \sum_{i=1}^n \sin \frac{1}{i^2} < 2$. 其中 $n \in \mathbb{N}^*$ 17 分

19. 二项式定理可以推广到任意实数次幂，即广义二项式定理：对于任意实数 α ，

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha}^k x^k = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2 \times 1} \cdot x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1} \cdot x^k + \cdots$$

对于无穷数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ ，

我们称 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 为数列 $\{a_n\}$ 的生成函数. 生成函数是重要的计数工具之一. 对

于给定的正整数 p ，记方程 $s_1 + s_2 + \cdots + s_p = k (k=0, 1, 2, 3, \cdots)$ 的非负整数解的个数为 b_k ，则 b_k 为

$$\underbrace{(1+x+\cdots+x^m+\cdots) \cdot (1+x+\cdots+x^m+\cdots) \cdots (1+x+\cdots+x^m+\cdots)}_{p \text{ 个括号}} \text{ 展开式中 } x^k \text{ 前的系数.}$$

(1) 写出无穷常数数列 $1, 1, 1, \cdots$ 的生成函数 $g(x) (0 < |x| < 1)$ 并化简；

(2) 利用广义二项式定理证明： $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k$ ，并求 b_k 的通项公式；

(3) 一次体质素养测试共分为十一个大项，前十项各有三个小项，第十一项仅有两个小项. 运动员需参加所有项目的测试以获取分数. 计分规则如下：通过第 $k (k=1, 2, \cdots, 10)$ 大项中的每一个小项，都可获得 2^k 分；通过第十一项中的每一个小项，可获得 1 分.

① 记 x_1, x_2, x_3 表示第一大项中每一个小项获得的分数， x_4, x_5, x_6 表示第二大项中每一个小项获得的分数， $\cdots, x_{28}, x_{29}, x_{30}$ 表示第十大项中每一个小项获得的分数， x_{31}, x_{32} 表示第十一大项中每一个小项获得的分数. 记 a_n 为获取 n 分的所有得分组合数. 请写出 $x_k (k=1, 2, \cdots, 32)$ 的取值集合，并用方程解的个数描述 a_n .

② 求 a_{2025} .

【解析】：(1)

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$$

法一： $g(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = 1 + x(1 + x + x^2 + \cdots) = 1 + xg(x)$ ，解得 $g(x) = \frac{1}{1-x}$.

法二： $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ 3 分

(2) 令 $\alpha = -n$ ， $C_{-n}^k = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k C_{n+k-1}^k$.

可得 $\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{n+k-1}^k x^k$, 所以 $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k$.

$$(1+x+\cdots+x^m+\cdots)^p = \left(\frac{1}{1-x}\right)^p = \sum_{k=0}^{\infty} C_{p+k-1}^k x^k, \text{ 所以 } b_k = C_{p+k-1}^k. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(3) \text{ ① } x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k} \in \{0, 2^k\} (k=1, 2, \dots, 10), \quad x_{31}, x_{32} \in \{0, 1\}.$$

a_n 为方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{32} = n$ 满足上述范围条件的解的个数.

② 设 $\{a_n\}$ 的生成函数为 $f(x)$, 则 $f(x) = (1+x^{2^1})^3 (1+x^{2^2})^3 \cdots (1+x^{2^{10}})^3 (1+x)^2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^{2^1})^3 (1+x^{2^2})^3 \cdots (1+x^{2^{10}})^3 (1+x)^2 = \frac{(1-x^{2^1})^3 (1+x^{2^1})^3 (1+x^{2^2})^3 \cdots (1+x^{2^{10}})^3}{(1-x^{2^1})^3} (1+x)^2 \\ &= \frac{(1-x^{2^{11}})^3}{(1-x^{2^1})^3} (1+x)^2 = \frac{(1-x^{2^{11}})^3}{(1+x)(1-x)^3} \end{aligned} \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

因为 $2025 < 2^{11} = 2048$, 故 $f(x)$ 与 $F(x) = \frac{1}{(1+x)(1-x)^3}$ 的展开式中 x^{2025} 前的系数相同.

$$F(x) = \frac{1}{(1+x)(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x^2)(1-x)^2}$$

由 (1) 知 $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$, 由 (2) 知取 $n=2$ 时有 $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}^k x^k$.

故 $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}^k x^k$, 其中 x^{2025} 前系数为

$$C_{2026}^1 + C_{2024}^1 + \cdots + C_2^1 = \frac{(2+2026) \cdot 1013}{2} = 1013 \times 1014.$$

故 $a_{2015} = 1013 \times 1014 = 1027182. \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$