

合肥一中 2025 届高三年级上学期阶段性诊断检测卷

数学试题

(考试时间:120 分钟 满分:150 分)

注意事项:

1. 答题前, 务必在答题卡和答题卷规定的地方填写自己的姓名、准考证号和座位号后两位。
2. 答题时, 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。
3. 答题时, 必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卷上书写, 要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卷规定的位置画出, 确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答, 超出答题区域书写的答案无效, 在试题卷、草稿纸上答题无效。
4. 考试结束, 务必将答题卡和答题卷一并上交。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | 2x - 4 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | 1 \leq x \leq 5\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
A. $\{2, 3, 4, 5\}$ B. $\{3, 4, 5\}$ C. $(2, 5]$ D. $[2, 5]$
2. $\frac{z}{i} = 1 + i$, 则 $\bar{z} = (\quad)$
A. $-1 - i$ B. $-1 + i$ C. $1 + i$ D. $1 - i$
3. 已知 $a = (0, 1)$, $b = (3, 3)$, 若满足 $c = a + tb$, 且 $\bar{c} \perp \bar{b}$, 则 $t = (\quad)$
A. $\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{6}$ D. 0
4. 已知一圆锥高为 2, 母线长为 $2\sqrt{2}$. 若用一平面截圆锥得到的圆台体积是圆锥的 $\frac{7}{8}$, 则圆台的侧面积为 (\quad)
A. $6\sqrt{2}\pi$ B. $4\sqrt{2}\pi$ C. $3\sqrt{2}\pi$ D. $\sqrt{2}\pi$
5. 已知 $\tan \theta = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$, 则 $\tan 2\theta = (\quad)$
A. 1 B. -1 C. 0 D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6. 已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足 $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{12} = 1$, $(x_2 - 12)^2 + y_2^2 = 1$, 则 $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ 的最小值为 (\quad)
A. 96 B. 81 C. $96 - 8\sqrt{6}$ D. $97 - 8\sqrt{6}$

7. 已知 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\omega > 0$, $f(x) = \sin^2(\omega x + \varphi) - \sin(\omega x + \varphi)\cos(\omega x + \varphi)$ 为偶函数, 且

$g(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有 3 个零点, 则 ω 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{23}{16}, \frac{31}{16})$ B. $(\frac{23}{16}, \frac{31}{16}]$ C. $[\frac{21}{16}, \frac{29}{16})$ D. $(\frac{21}{16}, \frac{29}{16}]$

8. 已知函数 $f(x) = e^x(ax-1) - x + 2$, 若存在唯一的整数 x_0 , 使 $f(x_0) < 0$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{1}{4} + \frac{1}{2e^4}, \frac{1}{3e^3} + \frac{1}{3})$ B. $(3e-1, 2e^2 - \frac{1}{2}]$
C. $[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}) \cup (3e-1, 2e^2 - \frac{1}{2}]$ D. $[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e}) \cup [\frac{1}{4} + \frac{1}{2e^4}, \frac{1}{3e^3} + \frac{1}{3}]$

二、多项选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目的要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 设 A, B, C 是三个随机事件, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若 A, B 互斥, 则 $P(A) + P(B) = 1$
B. 若 $A \subseteq B$, 则 $P(A) \leq P(B)$
C. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
D. 若 A, B 独立, 则 $P(\overline{AB}) = [1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)]$

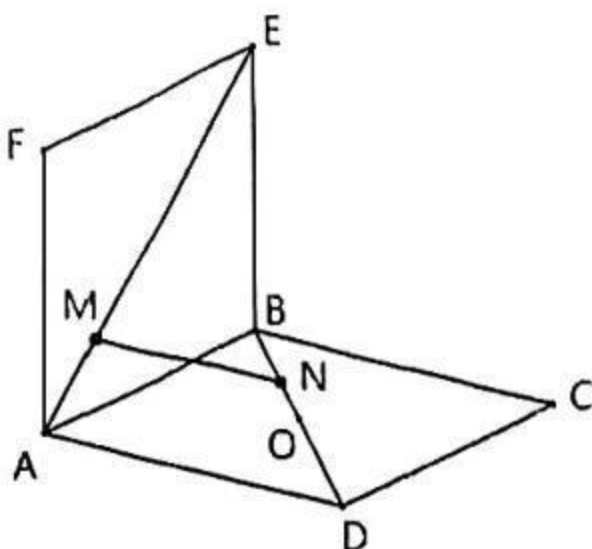
10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x+2|, & x \leq 0 \\ |\log_3 x|, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 方程 $f(x) = t$ 有四个不同的解 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且

$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 则 $\frac{1}{x_3^2 x_4} - x_4(x_1 + x_2)$ 的可能取值为 ()

- A. 2 B. 8 C. 16 D. 32

11. 如图所示, 两个正方形 $ABCD, ABEF$ 的边长为 a , 两个动点 M, N 分别在正方形对角线 AE 和 BD 上, BD 中点为 O 且 $ME = DN$, $MN = a$. 则 ()

- A. M, N 运动过程中, 不存在 $MN \perp AB$
B. 若平面 $MAD \cap$ 平面 $BEC = l$, $l \perp BE$, 则平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$
C. 当 N 在线段 DO 上运动时(不包括端点), 二面角 $A-MN-B$ 可以为直二面角
D. 当 N 在线段 BO 上运动时(不包括端点), 四面体 $M-ABN$ 的外接球表面积的最小值为 $\frac{7}{8}a^2\pi$.



三、填空题:本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 若 $f(x) = 2\sin 3x + \cos 3x - 1$, 则 $f(x)$ 的最小正周期为_____.

13. 函数 $f(x) = ax^2 + 2x - 4a - 6$ 在 $(-2, 2)$ 上有两个零点, 则 a 的取值范围是_____.

14. 已知 n 为正整数, 有穷数列 $a_k = 2^k (1 \leq k \leq n)$ 中所有可能的乘积 $a_i a_j (1 \leq i \leq j \leq n)$ 的和记为 T_n . 例如,

当 $n=3$ 时, $T_3 = a_1^2 + a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2 = 140$. 数列 $\left\{ \frac{2^n}{T_n} \right\}$ 的前 n 项和为_____.

四、解答题:本题共 5 小题, 共 77 分, 解答应写出必要的证明过程及验算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 对应的边为 a, b, c . 满足 $c \cos B - b \cos C = a - b$, 且 $a = 3$.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 求 b 的取值范围.

16. (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 3)$, 焦距为 4, 过点 $M(-1, 0)$ 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 N .

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

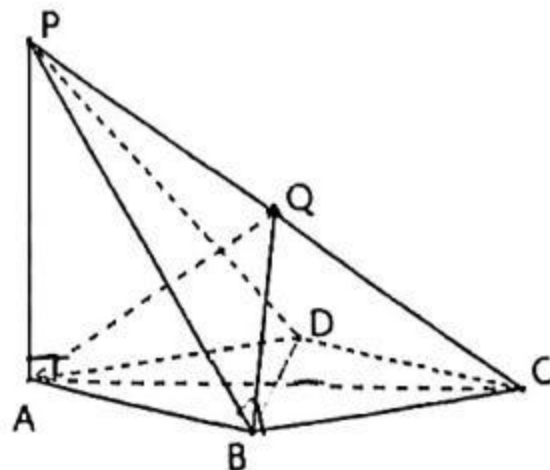
(2) 若 $\triangle PMN$ 的面积为 $\frac{9}{7}$, 求直线 l 的方程.

17. (本小题满分 15 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, $PA \perp AC$, $BC \perp BP$, $PA = 2\sqrt{2}$, $AC = 4$.

(1) 求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 若 Q 为 PC 上一点, $QA = QB$, 且二面角 $Q-AB-D$ 为 45° , 求 Q 到平面 PDB 的距离.



18. (本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x) = a \sin(x-1) - x + \frac{1}{x} + 1 (x > 0)$, 1 是 $f(x)$ 的一个极值点.

(1) 求实数 a 的值.

(2) 判断函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点个数, 并加以证明.

(3) 证明: $1 - \frac{1}{n+1} < \sum_{i=1}^n \sin \frac{1}{i^2} < 2$. 其中 $n \in \mathbb{N}^*$

19. (本小题满分 17 分)

二项式定理可以推广到任意实数次幂, 即广义二项式定理: 对于任意实数 α ,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha}^k x^k = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2 \times 1} \cdot x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1} \cdot x^k + \cdots$$

对于无穷数列 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, 我们称 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 为数列 $\{a_n\}$ 的生成函数. 生成函数是

重要的计数工具之一. 对于给定的正整数 p , 记方程 $s_1 + s_2 + \cdots + s_p = k (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$ 的非负整数解

的个数为 b_k , 则 b_k 为 $\underbrace{(1+x+\cdots+x^m+\cdots) \cdot (1+x+\cdots+x^m+\cdots) \cdots (1+x+\cdots+x^m+\cdots)}_{p \text{ 个括号}}$ 展开式中 x^k 前

的系数.

(1) 写出无穷常数数列 $1, 1, 1, \dots$ 的生成函数 $g(x) (0 < |x| < 1)$ 并化简;

(2) 利用广义二项式定理证明: $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^k x^k$, 并求 b_k 的通项公式;

(3) 一次体质素养测试共分为十一个大项, 前十项各有三个小项, 第十一项仅有两个小项. 运动员需参加所有项目的测试以获取分数. 计分规则如下: 通过第 $k (k = 1, 2, \dots, 10)$ 大项中的每一个小项, 都可获得 2^k 分; 通过第十一项中的每一个小项, 可获得 1 分.

① 记 x_1, x_2, x_3 表示第一大项中每一个小项获得的分数, x_4, x_5, x_6 表示第二大项中每一个小项获得的分数, $\dots, x_{28}, x_{29}, x_{30}$ 表示第十大项中每一个小项获得的分数, x_{31}, x_{32} 表示第十一大项中每一个小项获得的分数. 记 a_n 为获取 n 分的所有得分组合数. 请写出 $x_k (k = 1, 2, \dots, 32)$ 的取值集合, 并用方程解的个数描述 a_n .

② 求 a_{2025} .